

Mata kuliah : Fungsi Peubah Kompleks II

Materi : Singularitas dan Kenolan Fungsi Analitik

- Suatu titik z_0 merupakan singularitas fungsi $f(z)$ bila f gagal menjadi fungsi analitik pada z_0 .
- Setiap persekitaran z_0 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik.
- Macam singularitas:
 1. singularitas tak terasing
 2. singularitas terasing
- **singularitas tak terasing**
titik z_0 singularitas tak terasing bagi fungsi f jika dan hanya jika z_0 singularitas f dan setiap persekitaran z_0 memuat paling sedikit satu singularitas f selain z_0 .

Contoh:

$$f(z) = \log z$$

singularitas tak terasing: setiap titik di sumbu Riil tak positif.

- **Singularitas terasing**

Titik z_0 singularitas terasing bagi fungsi f jika terdapat persekitaran terhapus z_0 atau $N^*(z_0, \rho)$ dengan f analitik. Dengan kata lain, $f(z)$ analitik di seluruh anulus

$$0 < |z - z_0| < \rho.$$

Contoh:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad \text{singularitas terasing di } 1 \text{ dan } -1.$$

Karena $f(z)$ analitik di seluruh anulus, terdapat deret Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (1)$$

- Ada 3 kasus:

1. tidak ada $(z-z_0)$ berpangkat negatif pada (1), z_0 disebut singularitas yang dapat dihilangkan (removable singularity).

$$\text{contoh: } f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

2. sejumlah berhingga $(z-z_0)$ berpangkat negative pada (1), berbentuk

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots + c_0 + c_1 (z-z_0) + \dots$$

N bilangan bulat positif.

$$\text{contoh: } f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \text{ mempunyai kutub tingkat 2 pada } z=i$$

Teorema 7.2:

andaikan $f(z)$ analitik di persekitaran terhapus $0 < |z-z_0| < \rho$ pada titik z_0 , maka z_0 kutub tingkat N jika dan hanya jika $(z-z_0)^N f(z)$ mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada z_0 dan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^N f(z) \neq 0.$$

Sumber Pustaka:

Brown, J. W., and R. C. Churchill. “*Complex Variables and Applications*,” 7th ed. 2003.
New York: McGraw-HillCompanies, Inc.

Paliouras, J. D. “*Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*”. 1975. Jakarta: Erlangga