DIKTAT

KALKULUS DASAR

Disusun oleh:

Dwi Lestari, M.Sc

Rosita Kusumawati, M.Sc

Nikenasih Binatari, M.Si

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2013

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur kami panjatkan kepada Alloh SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan diktat Kalkulus Dasar ini dapat diselesaikan dengan lancar. Diktat ini disusun untuk panduan mempelajari mata kuliah Kalkulus Dasar. Penyusunan diktat ini merujuk pada beberapa sumber atau referensi yang digunakan untuk mengajar mata kuliah kalkulus.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Dosen-dosen yang telah memberikan sumbangsih ilmu dalam mengajarkan Kalkulus. Semoga mendapat balasan dari Alloh SWT. Diktat ini masih jauh dari sempurna, oleh sebab itu kami menampung kritik dan saran yang dapat digunakan untuk perbaikan selanjutnya.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I	Sistem Bilangan Riil, Pertidaksamaan, dan Sistem koordinat Kartesius
BAB II	Fungsi dan Grafik fungsi
BAB III	Fungsi Logaritma, Fungsi Eksponensial, atau Fungsi Trigonometri
BAB IV	Limit
BAB V	Turunan dan Aplikasinya
BAB VI	Integral dan Aplikasinya

BAB I

Sistem Bilangan Riil, Pertidaksamaan, dan Sistem koordinat Kartesius

Pada bagian ini akan dibahas mengenai bilangan riil, pertidaksamaan, interval, nilai mutlak, dan sistem koordinat kartesius.

A. Sistem bilangan Riil

Himpunan bilangan asli, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

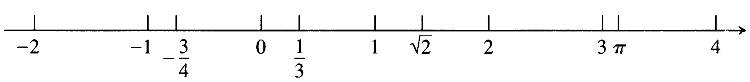
Himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \neq 0 \right\} \left\{ \ldots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 1, 2, \frac{7}{2}, \ldots \right\}$

Himpunan bilangan irrasional $\{\ldots, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, \log 3, \sqrt{3}, \pi, \ldots\}$

Secara geometris bilangan riil dapat digambarkan dalam garis bilangan berikut:



Himpunan

Definisi

Himpunan adalah kumpulan benda-benda atau obyek yang didefinisikan (diberi batasan) dengan jelas.

Contoh :

a. Himpunan mahasiswa pendidikan kimia UNY yang mengulang kalkulus dasar tahun 2013
b. Himpunan mahasiswa matematika yang IPK-nya lebih dari 3.
c. Himpunan dosen FMIPA UNY yang hamil di tahun 2013.
d. Himpunan bilangan bulat antara 1 sampai 10.
e. Himpunan bilangan prima kurang dari 20.

Dsb.

Anggota

Objek yang memenuhi batasan tersebut kemudian disebut dengan anggota himpunan, dinotasikan dengan $\in$.

Misalkan contoh a. Himpunan mahasiswa pendidikan kimia UNY yang mengulang kalkulus dasar tahun 2013 dinotasikan dengan K, maka untuk melambangkan anggota dari himpunan K sebagai berikut :

- (ina adalah mahasiswa pendidikan kimia UNY yang mengulang kalkulus dasar tahun 2013)

  Ina adalah anggota himpunan K atau Ina $\in$ K.
- (niken bukan mahasiswa pendidikan kimia UNY yang mengulang kalkulus dasar tahun 2013)

  Niken bukan anggota himpunan K atau Niken $\notin$ K.

Menyatakan anggota himpunan

1. Menyatakan dengan kata-kata

   Contoh :

   K adalah Himpunan mahasiswa pendidikan kimia UNY yang mengulang kalkulus dasar tahun 2013.

   M adalah Himpunan mahasiswa matematika yang IPK-nya lebih dari 3.

   L adalah Himpunan bilangan bulat antara 1 sampai 10.

   N adalah himpunan bilangan bulat lebih dari 1.

2. Menyatakan dengan mendaftar anggota-anggotanya

   Contoh :

   K = {ina, anisa,umi, isma, orin, bilbi, ning, deti, ana, nira, hila, heri, xxx }

   K = {mahasiswa pendidikan bla bla bla}

   M = {mahasiswa matematika yang IPK-nya lebih dari 3}

   L = {2,3,4,5,6,7,8,9}

   N = {bilangan bulat lebih dari 1}

   N = {2,3,4,5,...}

3. Menyatakan dengan notasi pembentuk himpunan

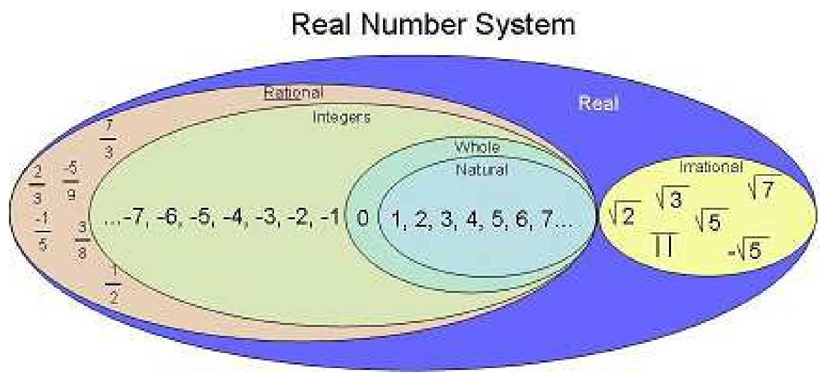
   $L = \{n, 1 < n < 10 \mid n \text{ bilangan bulat}\}$

   $L = \{n, 1 < n < 10 \mid n \in Z\}$

   $N = \{i, i > 1 \mid i \in Z\}$

Tugas:

Buatlah diagram sistem bilangan riil seperti gambar berikut.



Aplikasi Bilangan Bulat pada Ilmu Kimia:

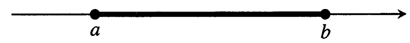
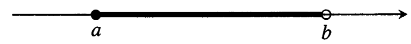
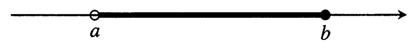
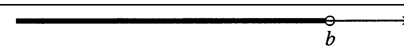
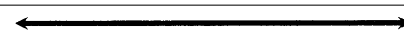
- Bilangan atom Z didefinisikan sebagai bilangan proton dalam inti atom, Z merupakan bilangan bulat positif yang nilainya kurang dari atau sama dengan 109. Coba tentukan nilai proton pada atom Besi, Hidrogen, Uranium, Oksigen, Nitrogen.
- Bilangan kuantum pada orbit atom menggunakan bilangan bulat positif, negatif atau nol.
- Pada sel elektrokimia, bilangan elektron menggunakan bilangan bulat positif.

Mengapa bilangan bulat penting dalam bidang kimia?

Aplikasi Bilangan Rasional pada Ilmu Kimia:

- Untuk mendefinisikan bilangan kuantum spin sebuah elektron $\left(s = \frac{1}{2}\right)$ dan bilangan kuantum spin inti, I dari inti atom. Misal ^{45}Sc memiliki $I = \frac{7}{2}$.
- Koordinat (0,0,0) dan $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ dari dua inti atom.

B. Interval : misalkan $a, b \in \mathbb{R}$

Notasi	Himpunan	Gambar
(a,b)	{x|a < x < b}	
[a,b]	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
[a,b)	$\{x \mid a \le x < b\}$	
(a,b]	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
[a, ∞)	$\{x \mid x \ge a\}$	
(-∞,b)	$\{x \mid x < b\}$	
(-∞,b]	$\{x \mid x \le b\}$	
(-∞,∞)=$\mathbb{R}$	Himpunan semua bilangan riil	

Perhatikan: -∞ dan ∞ bukan bilangan riil, jadi tidak termasuk dalam subset bilangan riil.

C. Pertidaksamaan

Berikut ini prosedur dalam menyelesaikan pertidaksamaan:

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan.
2. Mengalikankan bilangan positif yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan.
3. Mengalikan bilangan negatif yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan dan kemudiaan tanda pertidaksamaan harus dibalik.

Contoh:

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dan gambarkan solusinya pada garis bilangan.

a. $2x - 1 < x + 3$ b. $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ c. $\frac{6}{x-1} \ge 5$

Penyelesaian:

a.

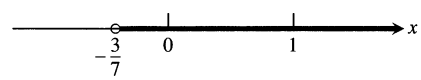
$$2x - 1 < x + 3$$
$$2x < x + 4$$
$$x < 4$$

Jadi, himpunan solusinya adalah interval (-∞,4) atau $\{x \mid x < 4\}$. Gambar pada garis bilangan berupa:

b.

$$-\frac{x}{3} < 2x + 1$$
$$-x < 6x + 3$$
$$0 < 7x + 3$$
$$-3 < 7x$$
$$-\frac{3}{7} < x$$

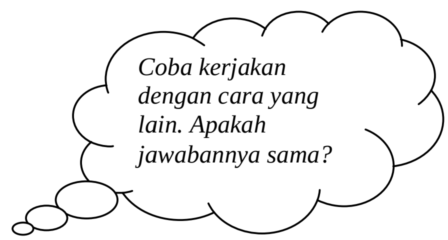
Jadi, solusinya adalah $\left(-\frac{3}{7}, \infty\right)$ atau $\left\{x \mid x > -\frac{3}{7}\right\}$. Gambar



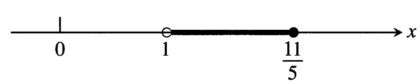
c. Perhatikan pembilang pada pertidaksamaan berupa konstanta positif, dan karena ruas kanan juga bilangan positif maka penyebut harus memenuhi bilangan positif.

Jadi, syarat : x – 1 > 0 atau x > 1 sehingga

$$\frac{6}{x-1} \geq 5$$
$$6 \geq 5x - 5$$
$$11 \geq 5x$$
$$\frac{11}{5} \geq x.$$



Solusinya adalah $\left(1, \frac{11}{5}\right]$. Gambar



D. Nilai mutlak

Misal $x \in \mathbb{R}$. Nilai mutlak *x* didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Sifat-sifat tanda mutlak:

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Contoh:

Selesaikan persamaan $|2x-3| = 7$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} 2x-3 &= 7 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} 2x-3 &= -7 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Jadi, solusinya *x* = 5 dan *x* = - 2.

Pertidaksamaan dengan tanda mutlak.

Jika *D* sebarang bilangan bernilai positif,

$$|x| < D \Leftrightarrow -D < x < D$$
$$|x| \leq D \Leftrightarrow -D \leq x \leq D$$

$$|x| > D \Leftrightarrow x < -D \text{ atau } x > D$$
$$|x| \geq D \Leftrightarrow x \leq -D \text{ atau } x \geq D$$

Contoh:

Selesaikan pertidaksamaan berikut:

a. $|x-5| < 9$

b. $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$

c. $|2x-3| \leq 1$

d. $|2x-3| \geq 1$

Penyelesaian:

a.

$$
\begin{aligned}
|x-5| &< 9 \\
-9 < \ x-5 \ &< 9 \\
-9+5 < \ x &< 9 \ +5 \\
-4 < \ x &< 14
\end{aligned}
$$

Jadi, solusinya interval (-4,14)

b.

$$
\begin{aligned}
\left|5-\frac{2}{x}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 5-\frac{2}{x} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -6 < -\frac{2}{x} < -4 \\
&\Leftrightarrow \quad 3 > \frac{1}{x} > 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Jadi, solusinya adalah interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

c.

$$
\begin{aligned}
|2x-3| &\leq 1 \\
-1 \leq 2x-3 &\leq 1 \\
2 \leq 2x &\leq 4 \\
1 \leq x &\leq 2
\end{aligned}
$$

Jadi, solusinya adalah interval $[1,2]$

d.

$$|2x-3| \geq 1$$

$$
\begin{array}{ccc}
2x-3 \geq 1 & & -(2x-3) \geq 1 \\
2x-3 \geq 1 & \text{atau} & 2x-3 \leq -1 \\
x-\frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} & & x-\frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2} \\
x \geq 2 & & x \leq 1
\end{array}
$$

Jadi, solusinya adalah $(-\infty,1] \cup [2,\infty)$.

Berikut ini contoh aplikasi pertidaksamaan dalam tanda mutlak:

Sebuah gelas berukuran 500 cm^3 mempunyai jari-jari 4 cm. Seberapa dekat kita dapat mengukur tinggi air h dalam gelas untuk meyakinkan kita mempunyai 500cm^3 air dengan galat/eror lebih kecil dari 1%, yakni galat kurang dari 5 cm^3?

Penyelesaian:

Volume tabung dirumuskan sebagai

$$V = \pi r^2 h$$

sehingga volume air dalam gelas adalah

$$V = 16\pi h.$$

Kita menginginkan

$|V - 500| \leq 5 \Leftrightarrow$ ……………………………..

……………………………..

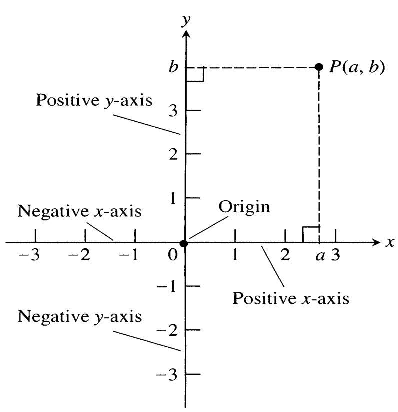
……………………………..

$|h - \ldots| \leq \ldots$

Jadi, …..

E. Sistem koordinat Kartesius

Pada Koordinat Kartesius terdapat dua sumbu yaitu sumbu horisontal atau disebut absis dan sumbu vertikal atau disebut ordinat.



Setiap pasangan terurut $P(a,b)$ menggambarkan sebuah titik pada koordinat kartesius dengan posisi (a,b).

Jarak dua Titik

Misalkan P(x_1, y_1) dan Q(x_2, y_2) dua buah titik pada bidang, jaraknya adalah

$$d(PQ) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh:

1. Tentukan jarak dua titik A(3, 2) dan B(-1, 5).
2. Tentukan jarak dua inti atom pada koordinat (1, 3, 2) dan (0, 4, 1).

   Coba kerjakan terlebih dahulu. Apakah jawaban Kalian sesuai dengan jawaban Dosen.?

Persamaan garis lurus dan grafiknya

Bentuk umum garis lurus:

$Ax+By+C = 0$ dengan A, B, dan C konstanta.

dengn nilai A dan B tidak boleh nol secara bersamaan.

Untuk menggambarkan garis lurus diperlukan dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang memenuhi persamaan tersebut.

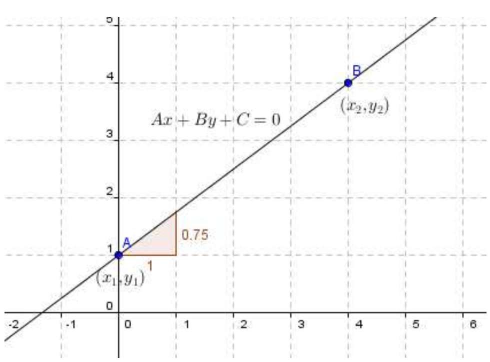
Catatan:

- Jika A=0, persamaan berbentuk $y = -\frac{C}{B}$, grafiknya sejajar sumbu –X
- Jika B=0, persamaan berbentuk $y = -\frac{C}{A}$, grafiknya sejajar sumbu –Y
- Jika $A \neq 0$ dan $B \neq 0$, maka $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Buktikan

$m = -\frac{A}{B}$

Misal diketahui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) titik pada sebuah garis, maka kemiringan garis tersebut adalah



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Persamaan garis lurus melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Persamaan garis lurus dengan gradien *m* dan melalui titik (x_1, y_1) adalah

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right).$$

Jika diketahui dua garis dengan gradien m_1 dan m_2 , maka

dua garis sejajar $\Leftrightarrow m_1 = m_2$;

dua garis tegak lurus $\Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$

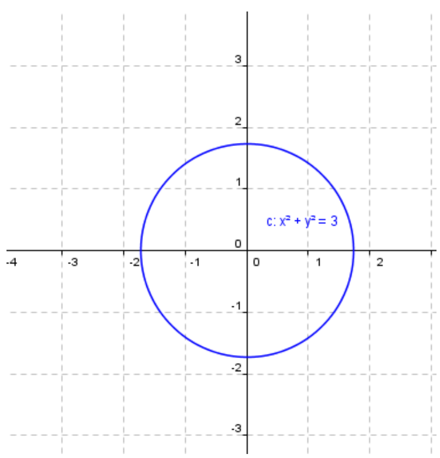
Persamaan Lingkaran

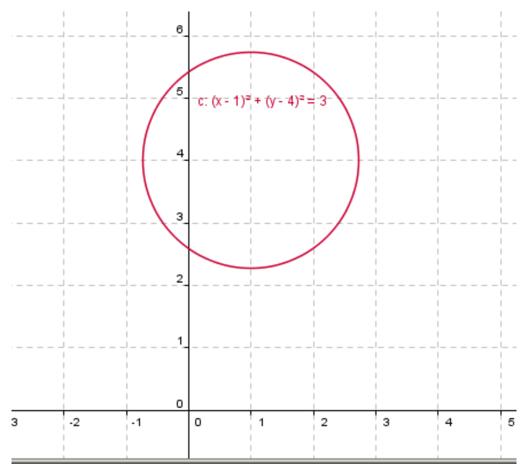
Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu (pusat lingkaran). Persamaan lingkaran berjari-jari *r* dan pusat (0, 0) adalah:

$x^2+y^2=r^2$. (gambar kiri)

Persamaan lingkaran berjari-jari *r* dengan pusat (*a*,*b*) adalah:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (gambar kanan)





LATIHAN:

1. Jika diketahui 2 < x < 6, nyatakan pernyataan berikut benar atau salah:

a) $0 < x < 4$ **b)** $0 < x - 2 < 4$

c) $1 < \frac{x}{2} < 3$ **d)** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

e) $1 < \frac{6}{x} < 3$ **f)** $|x - 4| < 2$

g) $-6 < -x < 2$ **h)** $-6 < -x < -2$

2. Jika diketahui -1 < y – 5 < 1, nyatakan pernyataan berikut benar atau salah:

a) $4 < y < 6$ **b)** $-6 < y < -4$

c) $y > 4$ **d)** $y < 6$

e) $0 < y - 4 < 2$ **f)** $2 < \frac{y}{2} < 3$

g) $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ **h)** $|y - 5| < 1$

Selesaikan soal berikut:

3. $-2x > 4$
4. $5x - 3 \leq 7 - 3x$
5. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
6. $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
7. $|t + 2| < 1$
8. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$
9. $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$
10. $|1 - x| > 1$
11. Sebuah gelas berukuran ¾ liter mempunyai jari-jari 7 cm. Seberapa dekat kita dapat mengukur tinggi air *h* dalam gelas untuk meyakinkan kita mempunyai ¾ liter air dengan galat/eror lebih kecil dari 2%?
12. Suhu-suhu Fahrenheit dan Celcius dikaitkan oleh rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Sebuah percobaan mensyaratkan bahwa larutan dipertahankan pada suhu 50^0 C dengan galat paling banyak 3% atau $1{,}5^0$C. Anda hanya memiliki termometer Fahrenheit. Berapa galat yang Anda perbolehkan pada termometer itu?
13. Tunjukkan segitiga dengan titik sudut (5,3); (-2,4); dan (10, 8) merupakan segitiga sama sisi.
14. Tunjukkan segitiga dengan titik sudut (2,-4); (4,0); dan (8,-2) merupakan segitiga siku-siku.

15. Tentukan persaman lingkaran dengan:
    a. Pusat (1,-2) jari-jari 3
    b. Pusat (-4,-3) jari-jari $\sqrt{5}$
    c. Pusat (2,-1) melalui (-2, -4)
    d. Diameter AB, dimana A(2, 1) dan B(6, 3)
    e. Pusat (2,3) menyinggung sumbu- X
    f. Pusat (3,5) menyinggung sumbu –Y
16. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran berikut
    a. $x^2 - 2x + 10 + y^2 + 6y - 4 = 0$
    b. $x^2 + 4x + 14 + y^2 + 6y = 17$
    c. $x^2 + y^2 - 6y = 16$
    d. $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$
17. Tentukan persamaan garis dalam bentuk Ax+By+C=0
    a. Melalui (2,2) dan gradien -3
    b. Melalui (3,4) dan gradien 2
    c. Dengan gradien -1 dan memotong sumbu-Y di (0,5)
    d. Melalui (2,4) dan (3,-1)
    e. Melalui (1,-3) dan (-5,-4)

BAB II

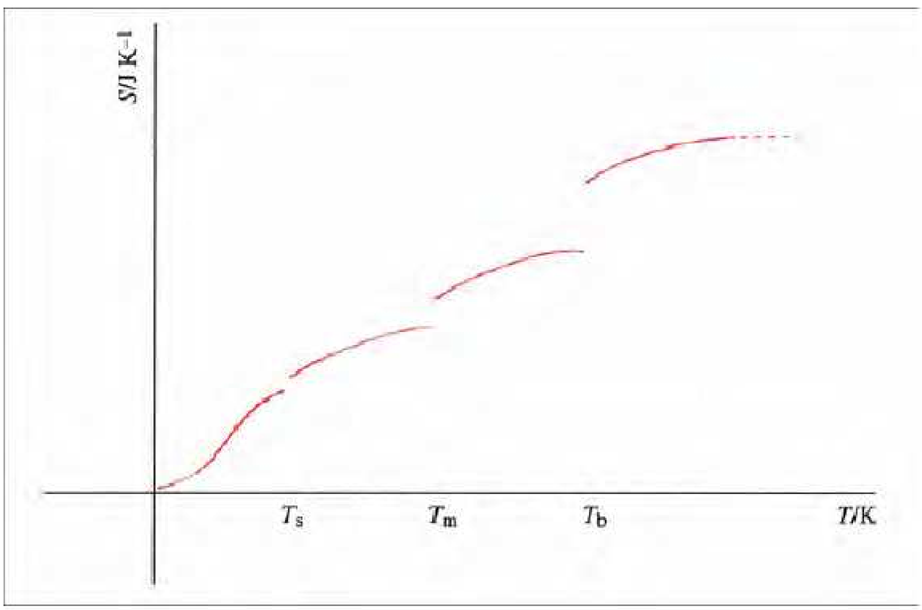
FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI

Perhatikan ilustrasi fungsi pada bidang kimia berikut.

Prescription Functions in Chemistry

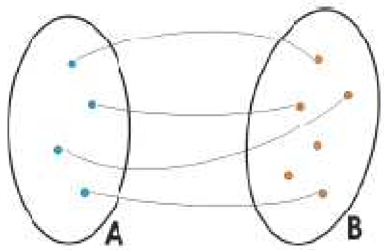
Functions, specified in the form of a prescription, are required when describing properties of chemical systems that undergo phase changes. For example:

- The function describing the change in entropy, as a function of temperature, involves the use of a prescription that contains a formula specific to a particular phase. At each phase transition temperature the function suffers a finite jump in value because of the sudden change in thermodynamic properties. For example, at the boiling point T_b the sudden change in entropy is due to the latent heat of evaporation (see Figure 2.8).



Fungsi dan Grafiknya:

Misalkan *A* dan *B* dua buah himpunan. Fungsi dari *A* ke *B* adalah aturan memasangkan (memadankan) setiap elemen di *A* **dengan tepat satu** elemen di *B*.



Notasi fungsi: y = f(x) dengan y variabel/peubah terikat (*dependent variable*) dan x variabel bebas (*independent variable*).

Jenis fungsi:

fungsi konstan, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi rasional, fungsi polinomial, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan lain-lain.

Fungsi konstan: f(x) = C, dengan C bilangan konstan.

Fungsi linear : f(x) = ax + b

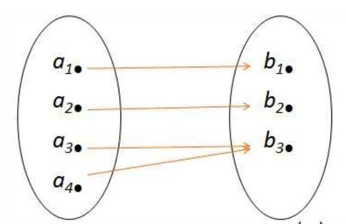
Fungsi kuadrat : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Fungsi eksponensial : $f(x) = e^x$

Fungsi logaritma : f(x) = log x

Misalkan diketahui X dan Y berturut-turut adalah domain dan kodomain. Fungsi f merupakan fungsi yang mengkawankan X terhadap Y.

1. Surjektif
   Fungsi f disebut surjektif jika setiap anggota kodomain mempunyai kawan dengan setidaknya satu anggota domain. $\forall y \in Y \ \exists x \in X \quad \ni f(x) = y$.
   Contoh :

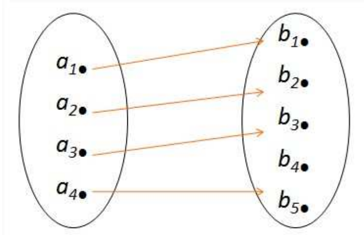


Gambar 1.

2. Injektif

   Fungsi f disebut injektif jika anggota kodomainnya hanya berkawan dengan tepat satu anggota domain. $\forall y_1, y_2 \in Y, x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Contoh :



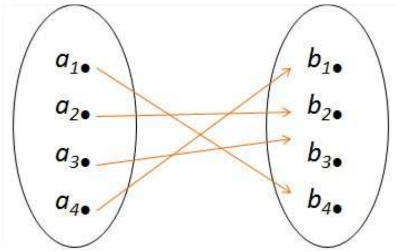
Gambar 2.

3. Bijektif

   Fungsi f disebut bijektif jika fungsi tersebut fungsi surjektif sekaligus injektif.

   $\forall y \in Y, \exists! x \in X \ni f(x) = y$

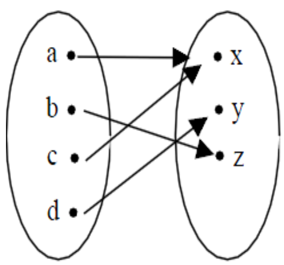
   Contoh :



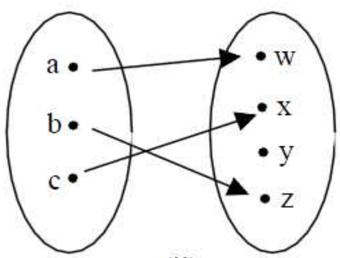
Gambar 3.

Latihan soal 1 :

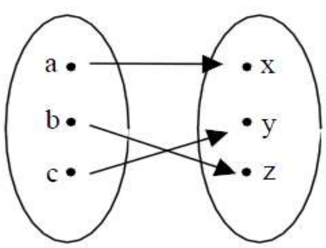
Tentukan jenis dari fungsi berikut :



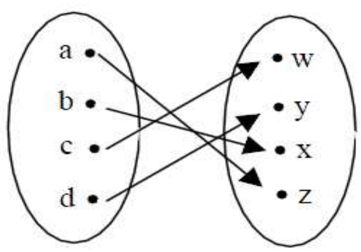
(i)



(ii)



(iii)

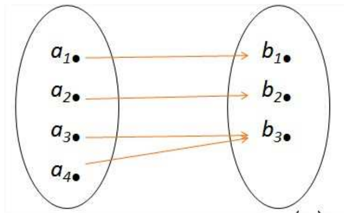


(iv)

Inverse Fungsi

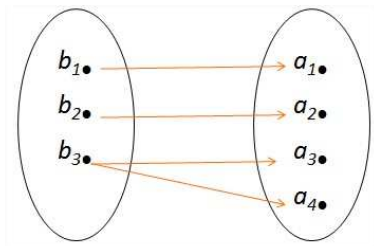
Invers dari fungsi f adalah relasi kebalikan dari fungsi f. Jadi, relasi dari fungsi f mengkawankan kodomain dari fungsi f terhadap domain dari fungsi f dengan pasangan yang sama.

Misalkan fungsi f mengkawankan domain dan kodomain sebagai berikut



Gambar 4.

Maka invers dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut



Gambar 5.

Latihan soal 2 :

1. Apakah invers dari fungsi yang surjektif saja juga merupakan fungsi?berikan alasannya!
2. Apakah invers dari fungsi yang injektif saja juga merupakan fungsi?berikan alasannya!
3. Apakah invers dari fungsi yang bijektif saja juga merupakan fungsi?berikan alasannya!
4. Tentukan invers dari fungsi yang ada di latihan soal 1.

Notasi fungsi

Untuk menyatakan bahwa fungsi f mengawankan anggota-anggota himpunan X terhadap anggota-anggota Y,

$f : X \to Y$

$f : x \to 2x$ dibaca *f* mengawankan *x* terhadap 2*x*.

$f : x \to x^2 + 3x + 5$ dibaca f mengawankan *x* terhadap $x^2 + 3x + 5$.

Rumus fungsi

$f(x) = 2x$

$f(x) = x^2 + 3x + 5$

$f(x) = y$

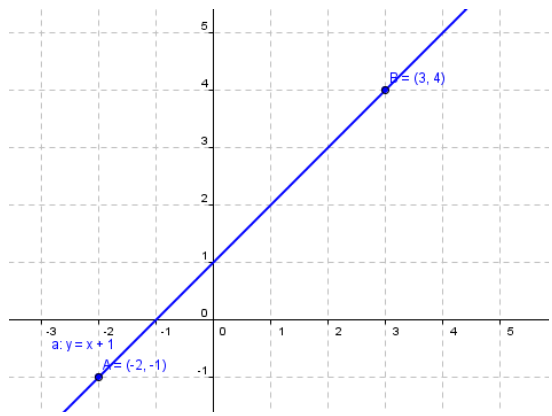
➔ *x* disebut variabel independent, dan *y* disebut variabel dependent.

Grafik fungsi

Cara menggambar grafik fungsi yang baik adalah dengan membuat tabel nilai-nilai sehingga diperoleh pasangan nilai dari peubah fungsi yang mewakili suatu titik. Untuk menggambar garis lurus diperlukan dua titik, untuk menggambar fungsi kuadrat minimal dibutuhkan tiga titik.

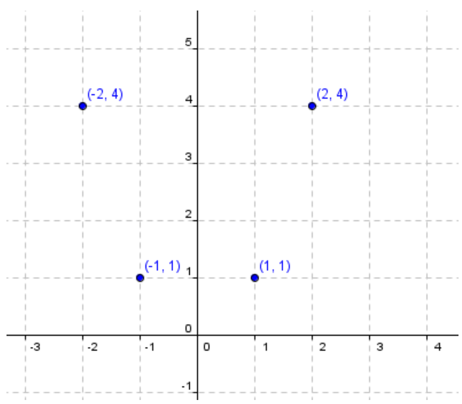
Misal, gambar grafik fungsi f(x)=x+1 sebagai berikut.

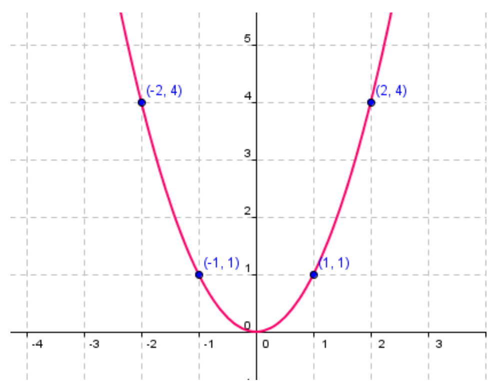
x	y = f(x) =x+1
-2	1
3	4



Misal, gambar grafik fungsi f(x)=x^2 pada interval [-2,2] sebagai berikut.

x	f(x)=x^2
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



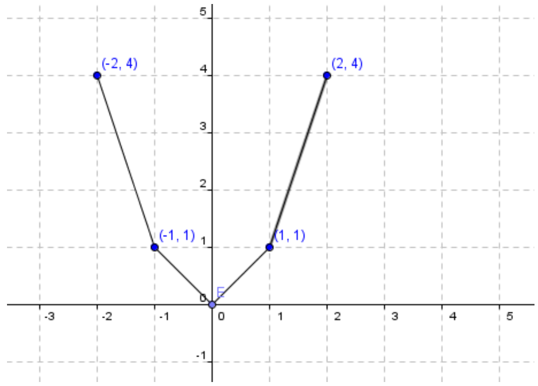


Langkah:

1. Buat tabel nilai pasangan x-y
2. Bila perlu cari titik potong dengan sumbu x (y=0) atau sumbu y (x=0). Jika fungsi berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, tentukan titik puncak $\left(x_p, y_p\right)$ dengan

   $x_p = -\dfrac{b}{2a}$ dan $y_p = \dfrac{D}{-4a}$.
3. Plot pasangan x-y sebagai titik pada koordinat Kartesius
4. Hubungkan titik-titik dengan kurva mulus.

Contoh gambar yang salah:



Grafik fungsi dalam koordinat kartesius $f : R \to R$

1. Fungsi linear

   Rumus umum fungsi linear

   $$f(x) = ax + b$$

   a menyatakan gradien/rasio/perbandingan antara selisih y terhadap selisih x sedangkan b menyatakan besar pergeserannya.

   Grafik fungsi linear merupakan garis lurus. Untuk menggambarnya diperlukan dua titik yang melalui garis tersebut kemudian dihubungkan secara lurus.

2. Fungsi kuadrat

   Rumus umum fungsi kuadrat

   $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

   Contoh :

   a. $f(x) = x^2$

   b. $f(x) = (x + 1)^2$ → diperoleh dengan menggeser fungsi $f(x) = x^2$ kekiri satu satuan.

   c. $f(x) = (x + 1)^2 + 3$ → diperoleh dengan menggeser fungsi $f(x) = (x + 1)^2$ ke atas tiga satuan.

   Kasus I, $f(x) = x^2 + ax + b$

   akan dinyatakan $f(x) = x^2 + ax + b$ dalam bentuk $f(x) = (x+c)^2 + d$

   $x^2 + ax + b = (x+c)^2 + d$

   $= (x^2 + 2cx + c^2) + d$

   $= x^2 + 2cx + c^2 + d$

   Darisini diperoleh

   $a = 2c$ → $c = a/2$

   dan $b = c^2 + d$ → $d = b - c^2 = b - (a/2)^2$

   Jadi, $f(x) = x^2 + ax + b = f(x) = (x + a/2)^2 + \{ b - (a/2)^2\}$

   Contoh :

   $f(x) = x^2 + 2x + 4$ → $a = 2$ dan $b = 4$

sehingga $c = a/2 = 2/2 = 1$ dan $d = b - (a/2)^2 = 4 - 1^2 = 3$.
Jadi, $f(x) = x^2 + 2x + 4$ bisa juga dinyatakan dalam bentuk $f(x) = (x+1)^2 + 3$
Akibatnya, untuk menggambar $f(x) = x^2 + 2x + 4$ dapat dengan langkah-langkah berikut

a. menggambar $f(x) = x^2$
b. menggambar $f(x) = (x+1)^2 \rightarrow$ dengan menggeser $f(x) = x^2$ kekiri satu satuan.
c. menggambar $f(x) = (x+1)^2+3 \rightarrow$ dengan menggeser $f(x) = (x+1)^2$ ke atas tiga satuan.

Latihan.
Gambarlah fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 6$.

Kasus II, $f(x) = ax^2 + bx + c$
Akan dinyatakan $f(x) = ax^2 + bx + c$ dalam bentuk $f(x) = a(x+e)^2 + f$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x+e)^2 + f \\ &= a\{x^2 + 2ex + e^2\} + f \\ &= ax^2 + 2aex + e^2a + f \end{aligned}$$

Darisini diperoleh
$b = 2ae \rightarrow e = b/2a$
dan $c = e^2a + f \rightarrow f = c - e^2a = c - (b/2a)^2 . a = c - b^2 / 4a$.

Contoh :
$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$
Diperoleh $a = 2$, $b = 4$ dan $c = 5$
Darisini didapatkan nilai-nilai
$e = b/2a = 4/(2.2) = 1$
$f = c - b^2/4a = 5 - 4^2/(4.2) = 3$
Jadi, $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x)= 2(x+1)^2 + 3$
Akibatnya, untuk menggambar $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut :

a. menggambar $f(x) = x^2$
b. menggambar $f(x) = (x+1)^2 \rightarrow$ diperoleh dengan menggeser (a) ke kiri satu satuan
c. menggambar $f(x) = 2(x+1)^2 \rightarrow$ diperoleh dengan mengalikan (b) dua kali lipat
d. menggambar $f(x) = 2(x+1)^2 + 3 \rightarrow$ diperoleh dengan menggeser (c) keatas tiga satuan.

Latihan.
Gambarlah fungsi $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$

3. Fungsi polinom derajat lebih dari 2.
   Akan dibahas setelah materi turunan.

LATIHAN:

1. Coba gambar grafik dengan tabel nilai berikut ini:

Table 2.2 Atomic number and ionization for the first 18 elements

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
IE/eV	13.6	24.6	5.4	9.3	8.3	11.3	14.5	13.6	17.4
Z	10	11	12	13	14	15	16	17	18
IE/eV	21.6	5.1	12.8	6.0	8.2	10.5	10.4	13.0	15.8

2. Diketahui fungsi f(x) = $x^2 + 3x - 4$.
   a. Tentukan titik potong sumbu-X
   b. Tentukan titik potong sumbu-Y
   c. Tentukan titik Puncak grafik
   d. Gambarlah grafik pada koordinat kartesius.
3. Berikut ini diberikan suatu fungsi, kerjakan seperti no.2
   a. $f(x) = x^2 + 5x + 6$
   b. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
   c. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

BAB III

FUNGSI EKSPONEN, LOGARITMA, DAN TRIGONOMETRI

A. Fungsi eksponensial

Berikut ini ilustrasi penggunaan fungsi eksponensial dalam bidang kimia.

- The function describing the change in equilibrium concentration of a given species following a sudden rise in temperature (in a so-called temperature jump experiment), has two parts, corresponding to times before and after the temperature jump (Figure 2.9).

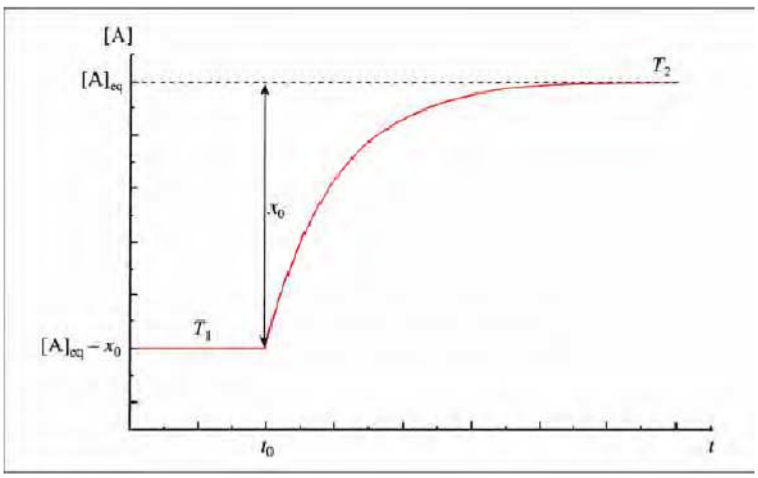
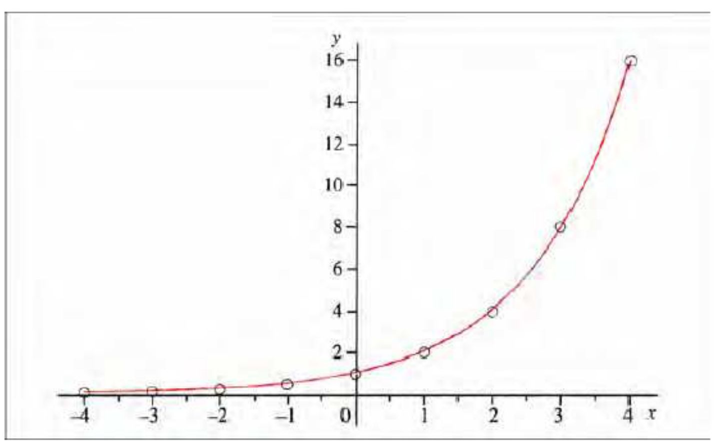
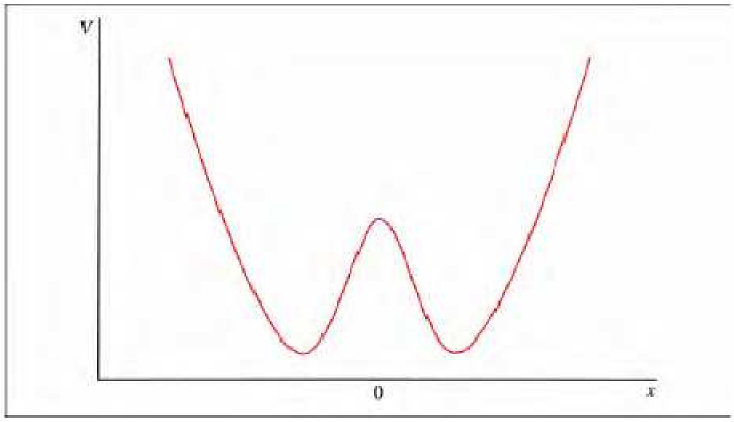


Figure 2.9 The exponential relaxation of the equilibrium concentration to a new equilibrium concentration following a sudden temperature jump from T_1 to T_2

Pada bidang kimia, fungsi eksponensial tampak pada contoh terdapat 2^n *spin states* untuk *n* proton yang ekuivalen. Jika n kita ganti dengan *x* maka didapatkan fungsi $y=f(x)=2^x$ yang gambarnya sebagai berikut. Nilai 2 sebagai basis atau bilangan pokok.



Berikut gra   2



B. Fungsi Logaritma

Contoh penerapan fungsi logaritma di bidang kimia:

- Sifat termodinamika pada atom atau molekul
- Persamaan model kinetik orde satu dan orde dua.
- Fungsi suhu terhadap konstanta ekuilibrium.

Definisi:

Diberikan $y=a^x$ dengan a basis atau bilangan pokok, maka

$$^{a}\log y = x \Leftrightarrow y = a^x$$

Ini berarti, $a^{^{a}\log y} = a^x = y$.

Sifat-sifat logaritma:

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^m = m.\log a$
4. $^{n}\log a = \dfrac{1}{n} \log a$
5. $^{n}\log a^m = \dfrac{m}{n} \log a$

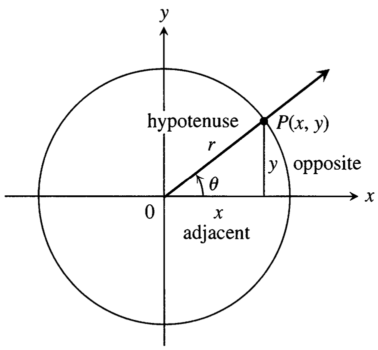
Catatan:

$\log x$ artinya logaritma dengan basis 10.

$\ln x$ artinya logaritma dengan basis (bilangan natural, e = 2,71…)

C. Fungsi Trigonometri

Perhatikan gambar berikut.



Sine:	$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$	Cosecant:	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$
Cosine:	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	Secant:	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
Tangent:	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	Cotangent:	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Berikut ini tabel nilai fungsi trigonometri untuk sudut istimewa:

Sudut	Sin	Cos
0	0	1
–	–	…
–	…	
–		
–		
—		
—		
—		

Sifat-sifat fungsi trigonometri:

-
-
-
-
-

BAB IV

LIMIT

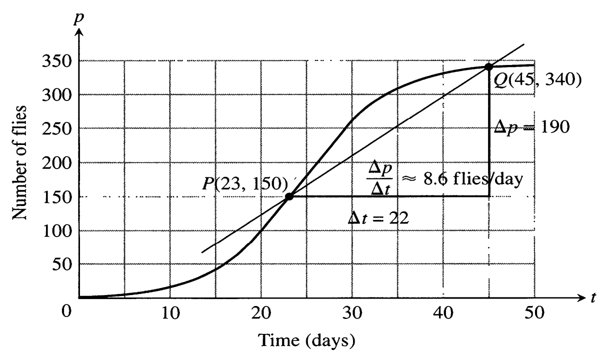
Perhatikan ilustrasi berikut:

EXAMPLE 3 *The average growth rate of a laboratory population*

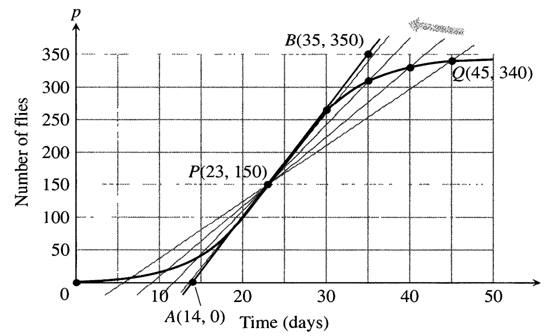
Figure 1.2 shows how a population of fruit flies *(Drosophila)* grew in a 50-day experiment. The number of flies was counted at regular intervals, the counted values plotted with respect to time, and the points joined by a smooth curve. Find the average growth rate from day 23 to day 45.

Solution There were 150 flies on day 23 and 340 flies on day 45. Thus the number of flies increased by $340 - 150 = 190$ in $45 - 23 = 22$ days. The average rate of change of the population from day 23 to day 45 was

$$\text{Average rate of change: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ flies/day.}$$



Q	Slope of PQ = Δ p/Δ t (flies/day)
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$



Coba pelajari konsep laju reaksi.

Laju reaksi menyatakan laju perubahan konsentrasi zat-zat komponen reaksi setiap satuan waktu:

$$V = \frac{\Delta[M]}{\Delta t}$$

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$, dengan domain atau daerah asal $D_f = \Re - \{2\}$.

x	*f*(*x*)

0.0000	1.0000
1.0000	3.0000
1.9000	4.8000
1.9500	4.9000
1.9999	4.9999
:	:
2.0000	??
:	:
2.0001	5.0000
2.0500	5.1000
2.1000	5.2000
3.0000	7.0000

Apakah nilai f(x) ada untuk x = 2? (coba pikirkan)

Perhatikan bahwa $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2)} = 2x+1,$

sehingga jika x mendekati 2 maka nilai f mendekati 5, dengan kata lain

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$$

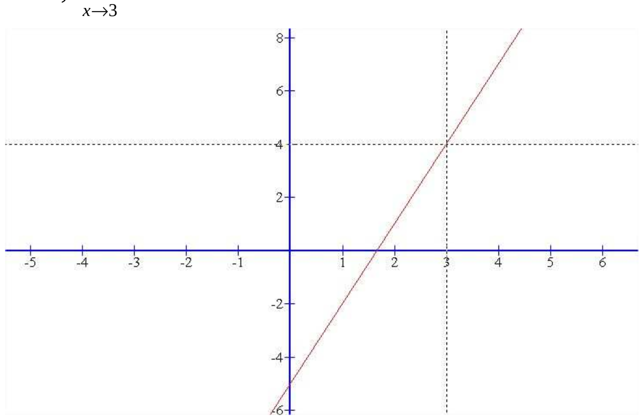
Definisi Limit:

Misalkan f(x) terdefinisi pada *I*=(a,b), kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari f(x) untuk x mendekati c disebut L, dinotasikan oleh

$$\lim_{x \to c} f(x) = L .$$

Artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Contoh.
Carilah nilai limit berikut, $\lim_{x \to 3} 3x - 5 = ...$



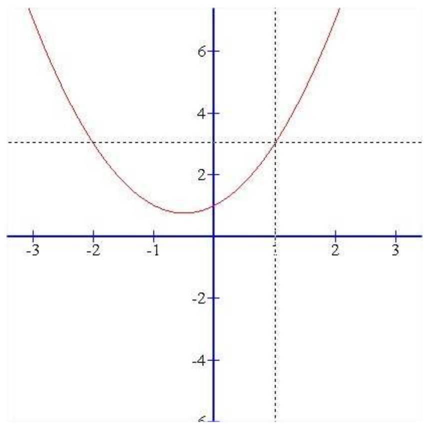
Gambar 2.1

Perhatikan gambar diatas, untuk x dekat dengan 3, dari sebelah kiri maupun kanan, nilai 3x – 5 dekat dengan 4. Jadi, dapat ditulis $\lim_{x\to 3} 3x-5=4$.

Contoh.

Carilah nilai limit berikut, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=....$

Substitusi nilai x = 1 pada $\frac{x^3-1}{x-1}$ diperoleh bentuk 0 / 0 (tidak terdefinisi). Akan tetapi, perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.2

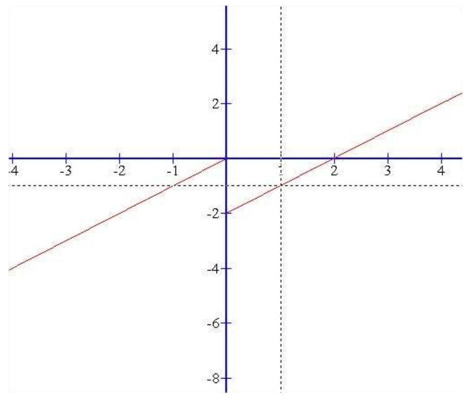
Grafik $\frac{x^3-1}{x-1}$ terputus pada x = 1 karena nilainya tidak terdefinisi, akan tetapi untuk nilai x yang dekat dengan 1 baik dari kiri maupun kanan, nilai $\frac{x^3-1}{x-1}$ dekat dengan 3. Oleh karena itu, dapat ditulis

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

Contoh.

Diberikan fungsi $f(x)=\begin{cases} x, x<0 \\ x-2, x\geq 0\end{cases}$. Carilah nilai limit berikut, $\lim_{x\to 0} f(x)=....$

Grafik fungsi *f* diatas adalah



Gambar 2.3

Perhatikan bahwa untuk x dekat dengan 0, maka nilai f(x) dari sebelah kiri dekat dengan 0 sementara nilai f(x) dari sebelah kanan dekat dengan -2. Pada kasus ini, dikatakan bahwa f(x) tidak mempunyai nilai limit di x = 0.

Definisi. Limit Kiri dan Limit Kanan

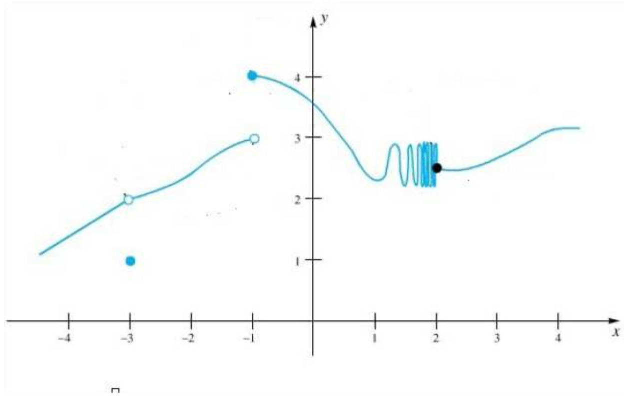
Dapat dikatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ jika untuk x dekat dengan c dari sebelah kanan maka f(x) dekat dengan L. Darisini L kemudian disebut dengan nilai limit kanan di x = c. Dengan cara yang sama, dapat dikatakan $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ jika untuk x dekat dengan c dari sebelah krii maka f(x) dekat dengan L dan L kemudian disebut dengan nilai limit kiri di x = c.

Selanjutnya, f mempunyai limit di x = c jika nilai limit kirinya di x = c sama dengan nilai limit kanannya di x = c.

Teorema.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$.

Contoh.
Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.4

Dari Gambar 2.4 diatas, dapat dilihat bahwa

a. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 2$

b. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$

c. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 4$

d. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ tidak ada

e. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2.5$

LATIHAN A:

Hitunglah nilai limit berikut.

1. $\lim\limits_{x \to -7} 2x + 5$
2. $\lim\limits_{x \to -2} 10 - 3x$
3. $\lim\limits_{x \to -2} 10 - 3x$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
5. $\lim x^3 - 2x^2 + 4x + 8$
6. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$
7. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$
8. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$
9. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$
10. $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$

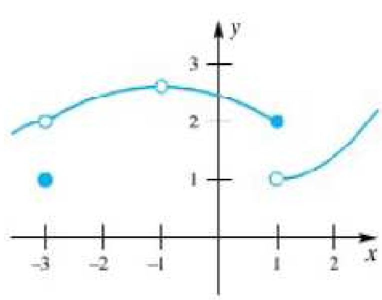
LATIHAN B

Carilah nilai (jika ada) dari

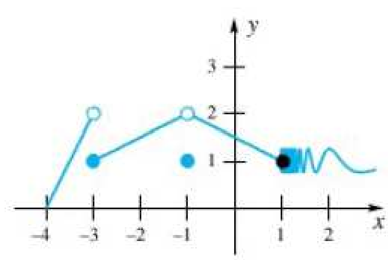
(a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$	(b) $f(-3)$	(c) $f(-1)$
(d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$	(e) $f(1)$	(f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$	(h) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$	(i) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

Untuk fungsi berikut

1.



2.



3. Gambarlah grafik fungsi berikut :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 + x & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$

Kemudian carilah nilai (jika ada) dari

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(c) $f(1)$ (d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

4. Gambarlah grafik fungsi berikut

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{if } x < 1 \\ x - 1 & \text{if } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$$

Kemudian carilah nilai (jika ada) dari

(a) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (b) $g(1)$

(c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

II.2 Mencari nilai limit untuk fungsi-fungsi sederhana

Carilah nilai-nilai limit untuk soal-soal berikut

1. $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = ...$
2. $\lim_{x \to -1} (3x^2 - 1) = ...$
3. $\lim_{x \to 0} (2x + 1)(x - 3) = ...$
4. $\lim_{x \to \sqrt{2}} (2x^2 + 1)(7x^2 - 3) = ...$
5. $\lim_{x \to \sqrt{2}} (2x^2 + 1)(7x^2 - 3) = ...$

Bandingkan dengan nilai-nilai limit untuk soal-soal berikut

6. $\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 49}{x - 7} \right) = ...$

7. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{2x^2 - 18}{3 - x} \right) = ...$

8. $\lim_{t \to 1} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \right) = ...$

9. $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1} \right) = ...$

10. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = ...$

Pada soal no 1 – 5, nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya, sementara untuk soal 6 – 10, fungsi tersebut tidak terdefinisi pada titik limitnya. Jika titik limit disubstitusikan, maka pada soal 6 – 10 akan didapatkan bentuk 0/0.

Teorema Substitusi

Jika f adalah fungsi polinomial atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Jika $f(c)$ terdefinisi. Pada kasus fungsi rasional, hal ini berarti bahwa nilai penyebutnya di titik x = c tidak nol.Jika diberikan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi

fungsi yang mempunyai limit di titik x = c, maka berikut ini adalah beberapa sifat-sifat limit :

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, provided $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, provided $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ when n is even.

Latihan soal.

1. $\lim_{x \to 3} (x - 5)$

2. $\lim_{t \to -1} (1 - 2t)$

3. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim_{t \to -1} (t^2 - 1)$

6. $\lim_{t \to -1} (t^2 - x^2)$

7. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

8. $\lim_{t \to -7} \frac{t^2 + 4t - 21}{t + 7}$

9. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$

11. $\lim_{x \to -t} \frac{x^2 - t^2}{x + t}$

12. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{(t + 4)(t - 2)^4}}{(3t - 6)^2}$

14. $\lim_{t \to 7^+} \frac{\sqrt{(t - 7)^3}}{t - 7}$

BAB V

TURUNAN

Perhatikan sebuah benda yang jatuh bebas. Hasil percobaan menunjukan posisinya setiap saat $S(t) = 8t^2$. Ingin diketahui berapa kecepatannya saat $t = 1$?

t_1	t_2	$S(t_1)$	$S(t_2)$	$V_{\text{rata-rata}} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$
1	2	8	32	24
1	1,5	8	18	20
1	1,1	8	9,68	16,8
1	1,01	8	8,1608	16,08
1	1,001	8	8,016008	16,008

Dari tabel di atas kita dapat menghitung kecepatan rata-rata antara t=1 dan t=1+Δt. Untuk menghitung kecepatan sesaat pada t=1, didefinisikan kecepatan sesaat sebagai berikut:

$$V_{\text{sesaat}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{rata-rata}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Definisi Turunan:

Misalkan f sebuah fungsi riil dan $x \in D_f$. Turunan dari f di titik x, dituliskan sebagai

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Beberapa notasi turunan: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$.

I . Aturan turunan:

1. Misal c konstanta, f(x)=c, maka f'(x)=0
2. f(x)=cx, maka f'(x) = c.
3. $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$
4. $f(x) = u(x).v(x)$, maka $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$
5. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, maka $f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$

Turunan Berantai

Jika $u = f(x)$ dan $y = u^n$ maka $y' = n.u^{n-1}.u'$

Fungsi Trigonometri

1. $y = \sin x$ ➔ $y' = \cos x$
2. $y = \cos x$ ➔ $y' = -\sin x$

Jika $u = f(x)$ maka berlaku :

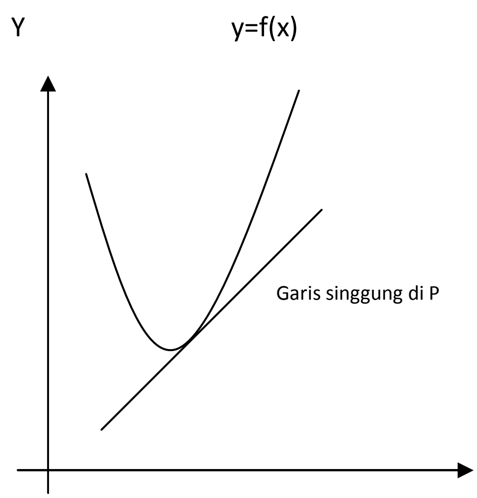
3. $y = \sin u$ ➔ $y' = \cos u \, . \, u'$
4. $y = \cos u$ ➔ $y' = -\sin u \, . \, u'$

Dengan menggunakan teorema turunan diperoleh :

5. $y = \tan u$ ➔ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'$ = $\sec^2 u \; . \; u'$
6. $y = \cot u$ ➔ $y' = \dfrac{1}{-\sin^2 u}.u'$ = $-\cos ec^2 u \; . \; u'$

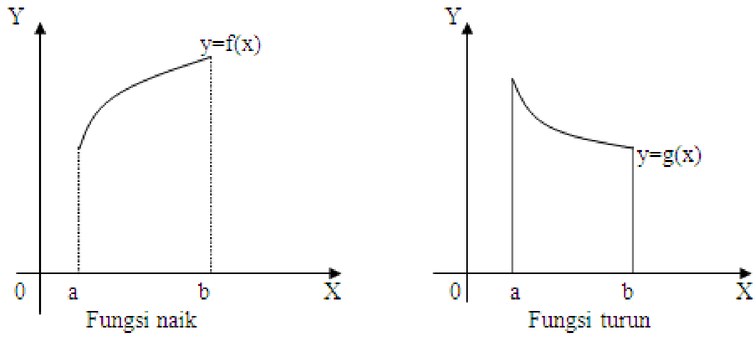
II. TAFSIRAN GEOMETRIS SUATU TURUNAN FUNGSI

A. Garis Singgung Kurva



1. Gradien garis singgung (m) = $f'(x)$
2. Persamaan Garis Singgung dengan gradien m dan melalui titik (x_1,y_1) dirumuskan : $y - y_1 = m(x - x_1)$

B. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Syarat : $y = f(x)\begin{cases} Naik & jika \quad f'(x) > 0 \\ Turun & jika \quad f'(x) < 0 \end{cases}$

C. Jarak, Kecepatan, Percepatan

$$y = S(x)\begin{cases} S(x) & = & jarak \\ S'(x) & = & kecepatan \\ S''(x) & = & percepatan \end{cases}$$

D. Stasioner, Maksimum, Minimum dan Belok

Fungsi $y = f(x)$ stasioner jika $f'(x) = 0$

Untuk sebarang titik $(x_0, f(x_0))$ dengan $f'(x_0)$ = 0 maka titik $(x_0, f(x_0))$ disebut titik-titik stasioner. Titik stasioner dapat berupa : titik balik maksimum, titik balik minimum, atau titik belok.

1. Titik balik maksimum

   Syarat : $f''(x_0) < 0$

   $f(x_0)$ = nilai maksimum

   $(x_0, f(x_0))$ = titik balik maksimum

2. Titik balik minimum

   Syarat : $f''(x_0) > 0$

   $f(x_0)$ = nilai minimum

   $(x_0, f(x_0))$ = titik balik minimum

3. Titik belok

   Syarat : $f''(x_0) = 0$

   $f(x_0)$ = nilai belok

   $(x_0, f(x_0))$ = titik belok

LATIHAN A:

Selesaikan soal berikut:

1. $f(x) = 4 - x^2;\quad f'(-3),\ f'(0),\ f'(1)$

2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\quad F'(-1),\ F'(0),\ F'(2)$

3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\quad p'(1),\ p'(3),\ p'(2/3)$

6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\quad r'(0), r'(1), r'(1/2)$

Carilah turunan pertama atau y' dari:

7. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

8. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$

9. $y = (1-x)^2(2x+3)$

10. $y = \sqrt[4]{(2x^2-3)^3}$

LATIHAN B

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1. $y = (1 + x)^{15}$ **2.** $y = (7 + x)^5$

3. $y = (3 - 2x)^5$ **4.** $y = (4 + 2x^2)^7$

5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$ **6.** $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \frac{1}{(x + 3)^5}$ **8.** $y = \frac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$

9. $y = \sin(x^2 + x)$ **10.** $y = \cos(3x^2 - 2x)$

11. $y = \cos^3 x$ **12.** $y = \sin^4(3x^2)$

13. $y = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^3$ **14.** $y = \left(\frac{x - 2}{x - \pi}\right)^{-3}$

15. $y = \cos\left(\frac{3x^2}{x + 2}\right)$ **16.** $y = \cos^3\left(\frac{x^2}{1 - x}\right)$

17. $y = (3x - 2)^2(3 - x^2)^2$ **18.** $y = (2 - 3x^2)^4(x^7 + 3)^3$

19. $y = \frac{(x + 1)^2}{3x - 4}$ **20.** $y = \frac{2x - 3}{(x^2 + 4)^2}$

LATIHAN C

1. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$, tentukan interval nilai x dimana f turun dan f naik.
2. Tentukan nilai minimum $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ pada interval $-3 < x < 4$.
3. Dari karton berbentuk persegi dengan sisi c cm akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan cara menggunting empat persegi di pojoknya sebesar h cm. Tentukan nilai *h* agar volume kotak maksimum.

LATIHAN D

Turunan tingkat tinggi

Tentukan $\frac{d^3y}{dx^3}$ fungsi berikut.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$ **2.** $y = x^5 + x^4$

3. $y = (3x + 5)^3$ **4.** $y = (3 - 5x)^5$

5. $y = \sin(7x)$ **6.** $y = \sin(x^3)$

7. $y = \frac{1}{x - 1}$ **8.** $y = \frac{3x}{1 - x}$

BAB VI

INTEGRAL

A. Anti Turunan (Integral Tak Tentu)

> F suatu anti turunan f pada selang I jika $D_xF(x) = f(x)$ pada I,
> yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I

Contoh 1. Carilah suatu anti turunan fungsi $f(x) = 3x^2$ pada $(-\infty, \infty)$!

Jawab: $F(x) = x^3 +$ $\boxed{\begin{array}{l} 10 \\ 4 \\ 1/3 \\ -1 \\ : \end{array}}$ *konstanta*, jadi $F(x) = x^3 + \mathbf{C}$

Contoh 2. Carilah anti turunan dari :

- $f(x) = 4x - 7$
- $g(x) = 2x^5$
- $h(x) = 3^x + \cos x$

Jawab :

- $F(x) = 2x^2 - 7x + C$
- $G(X) = \frac{1}{3}x^6 + C$
- $H(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \sin x + C$

Notasi Leibniz $\int \cdots \; dx$

> **Aturan Pangkat**
>
> Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali –1, maka $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$

Sifat kelinieran. Andaikan *f* dan *g* mempunyai anti turunan (integral tak tentu) dan k suatu konstanta. Maka :

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3) $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Contoh :

1. $\int (x^2+3x)dx =$
2. $\int (x^3+4x^2+7x)dx =$
3. $\int x(x^2+3)^2 dx =$

RUMUS DASAR

- $\int kdx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec x tgx dx = \sec x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\arctan x + C \end{cases}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} arc\sec x + C \\ -\arccos ecx + C \end{cases}$
- $\int \sec^2 xdx = tgx + C$
- $\int \cos ec^2 xdx = -\cot gx + C$
- $\int \cos ecx \cot gxdx = -\cos ecx + C$

Teorema (Aturan Pangkat yang Dirampatkan)

Andaikan *g* suatu fungsi yang dapat dideferensialkan dan r suatu bilangan rasional serta r ≠ – 1, maka $\int [g(x)]^r g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$

Contoh :

$\int (x^2 - 3)^5 x\, dx$ =

$u = x^2 - 3$

$du = 2x\, dx$

Penyelesaian:

⇨ $\int (x^2 - 3)^5 xdx$ = ……………………………………

= ……………………………………

Latihan Soal p.307 No. 1 – 18, 19 – 24, 27 – 31

B. INTEGRAL TENTU

1. Fungsi-fungsi Yang Dapat Diintegralkan

Teorema A (Teorema Keintegralan)

Jika f terbatas pada [a,b] dan ia kontinu di sana kecuali pada sejumlah terhingga titik, maka f terintegralkan pada [a,b]. Khususnya, jika f kontinu pada seluruh selang [a,b], maka ia terintegralkan pada [a,b].

Fungsi-fungsi yang terintegralkan pada selang [*a*,*b*] antara lain :

1. Fungsi polinom
2. Fungsi sinus dan cosinus
3. Fungsi rasional, dengan syarat [*a*,*b*] tidak memuat titik-titik yang membuat penyebut “0“

C. TEOREMA DASAR KALKULUS

Teorema A (Teorema Dasar kalkulus)

Jika f kontinu pada [a,b] dan F sebarang anti turunan dari f, maka

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Contoh :

Buktikan $\int_a^b x^r \; dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$, untukk $r \neq 1$

Jawab :

$$f(x) = x^r \rightarrow F(x) = \frac{1}{r+1}.x^{r+1}$$

$$F(a) = \frac{1}{r+1}a^{r+1}$$

$$F(b) = \frac{1}{r+1}b^{r+1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{r+1}b^{r+1} - \frac{1}{r+1}a^{r+1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

Teorema B (Kelinearan Integral Tentu)

Andaikan f dan g terintegralkan pada [a,b] dan k merupakan suatu konstanta maka kf dan f + g akan terintegralkan juga dan :

(1) $\int_a^b k.f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)$

(2) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Sebagai akibat dari (1) dan (2) diperoleh

(3) $\int [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Contoh :

Hitung $\int_1^2 \left(5x+2x^2\right)dx$

Jawab :

$$\int_1^2 \left(5x+2x^2\right)dx = 5\int_1^2 x\,dx + 2\int_1^2 x^2\,dx$$

$$= 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= 5\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{73}{6}$$

Latihan Soal p 355 – 356 No. 2, 4, 16, 18, 22, 24, 26, 32, 34, dan 44

Metode Substitusi

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

$$\int f(u)\,du = F(u)+c$$

$$\int f(g(x))\,d(g(x)) = F(g(x))+c$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boxed{\int f(g(x))\,.\,g'(x)\,dx = F(g(x))+c}$$

Contoh :

$$\int x\sin(x^2+4)dx$$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 4$

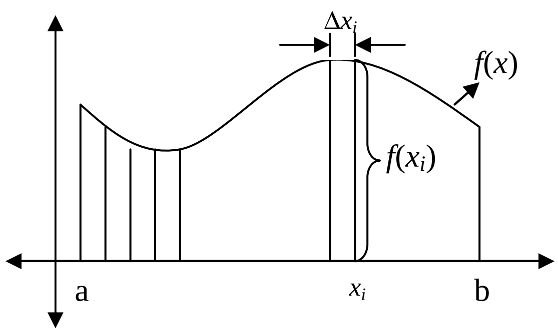
$du = 2x\,dx$ atau $\frac{1}{2}du = x\,dx$ *sehingga ;*

$$\int x\sin(x^2+4)dx = \int \sin u\,.\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}.\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+4\right)+c$$

D. APLIKASI INTEGRAL : Menghitung Luas Daerah

Daerah di atas sumbu X



Tentukan luas daerah *R* yang dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$.

$$
\begin{aligned}
A(R) &\approx A(R_1) + A(R_2) + \ldots + A(R_i) + \ldots + A(R_n) \\
&\approx f(x_1)\ \Delta x_1 + f(x_2)\ \Delta x_2 + \ldots + f(x_i)\ \Delta x_i + \ldots + f(x_n)\ \Delta x_n \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh bahwa luas daerah di atas sumbu X adalah $A(R) = \int_a^b f(x)dx$.

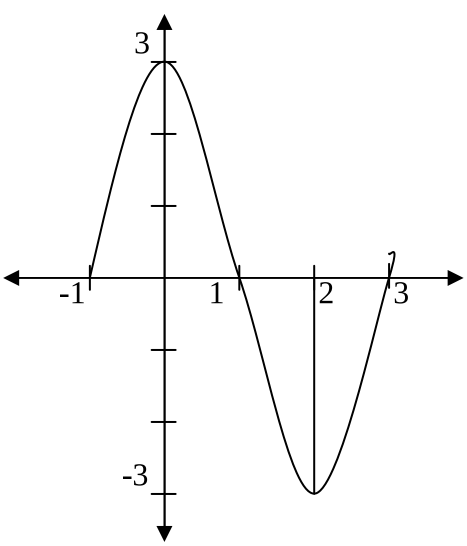
Daerah di bawah sumbu X

Luas daerah di bawah sumbu X diperoleh:

$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$.

Contoh 1: Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara x = -1 dan x = 2, dan oleh garis x = 2.

Penyelesaian



Perhatikan bahwa ada sebagian daerah yang berada di atas sumbu x dan ada yang di bawah sumbu x. Sehingga luas masing-masing bagian harus dihitung secara terpisah.

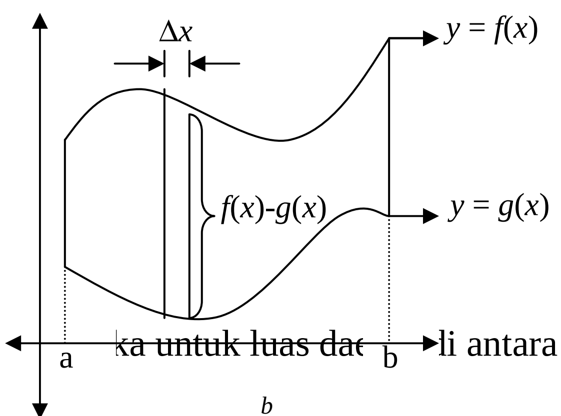
$$A(R) = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx - \int_{1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

■

Daerah di antara dua kurva



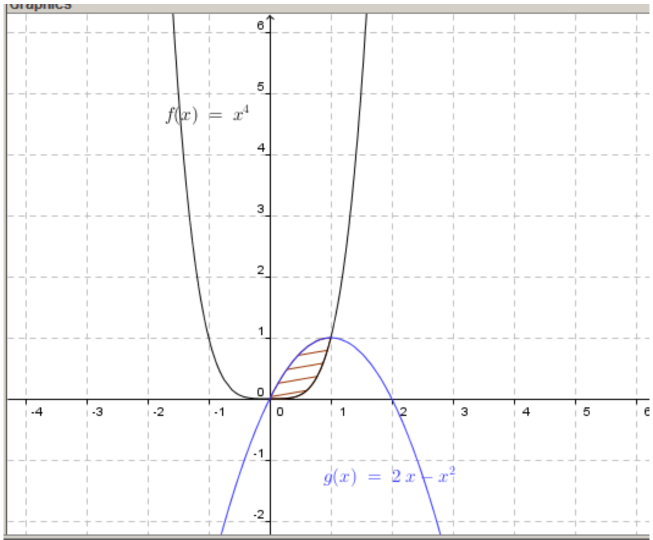
Tinjaulah kurva $y = f(x)$ dan kurva $y = g(x)$ dengan $g(x) \le f(x)$ pada selang $a \le x \le b$. Dengan cara yang sama seperti halnya mencari luas daerah di atas sumbu x

ka untuk luas dae li antara dua kurva diperoleh:

$$A(R) = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

Contoh 2: Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian



$$A(R) = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

6.2 Volume Benda Putar

Integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas. Hal ini tidaklah mengherankan karena integral tersebut memang diciptakan untuk keperluan itu. Bahkan hampir setiap besaran yang dianggap sebagai hasil pemotongan sesuatu menjadi bagian-bagian yang lebih kecil, aproksimasikan tiap bagian, penjumlahan, dan pengambilan limit bila tiap bagian mengecil dapat diartikan sebagai suatu integral.

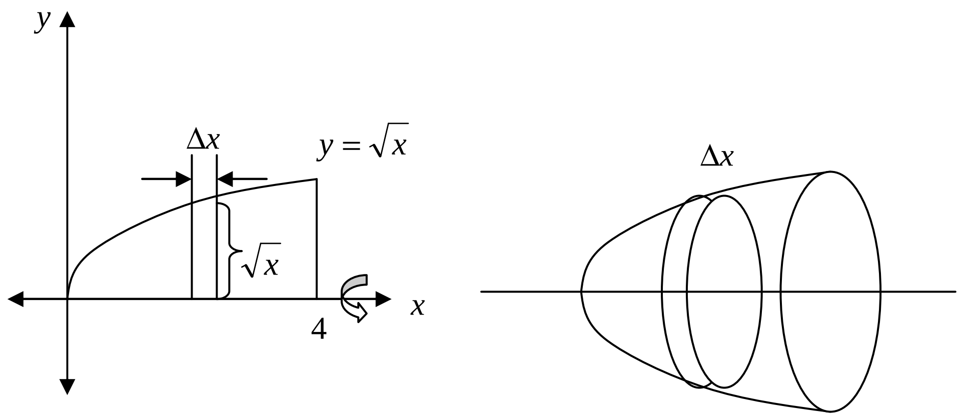
Metode cakram

Suatu daerah rata yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus dan diputar tehadap garis tersebut maka daerah tersebut akan membentuk suatu benda putar.

Apabila daerah R yang dibatasi kurva $y = f(x)$ sumbu x, garis $x = a$, dan garis $x = b$ kemudian R diputar terhadap sumbu x maka volume benda putar yang terjadi adalah $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

Contoh 3: Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah R yang dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$ sumbu x dan garis $x = 4$ bila R diputar terhadap sumbu x.

Penyelesaian

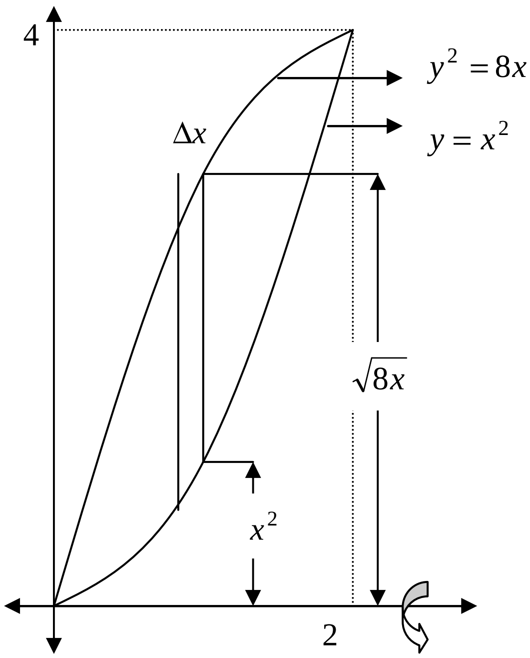


Maka volumenya adalah $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} \right]_0^4 = 8\pi$ ■

Metode cincin

Apabila daerah R yang dibatasi kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, sumbu x, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dengan $g(x) \leq f(x)$ untuk $a \leq x \leq b$ kemudian R diputar terhadap sumbu x maka volume benda putar yang terjadi adalah $V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx$.

Contoh 4: Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah R yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ apabila R diputar terhadap sumbu *x*.



Jadi volumenya adalah

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[8x - x^4 \right] dx$$

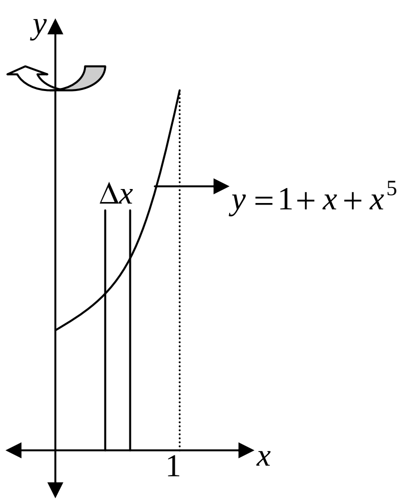
$$= \pi \left[4x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

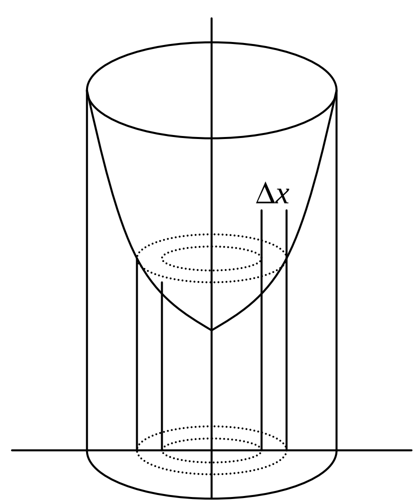
$$= \pi \left(16 - \frac{32}{5} \right) = \frac{48}{5} \pi$$

6.3 Volume Benda Putar: Metode Kulit Tabung

Contoh 5: Daerah R adalah sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 1 + x + x^5$ sumbu *x*, sumbu *y*, dan garis *x* =1. Tentukan volume dari benda putar yang terjadi bila daerah R diputar mengelilingi sumbu *y*.

Penyelesaian





Jadi volumenya

$$V = 2\pi\int_a^b x \; f(x) \, dx \qquad = 2\pi\int_0^1 x \left(1 + x + x^5\right) dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x + x^2 + x^6 \; dx \quad = 2\pi\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) \qquad = \frac{41}{21}\pi$$

■

DAFTAR PUSTAKA:

Dale Varbeg, Edwin J Purcel. 2001. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Ketujuh.* Bandung: Interaksara.

Thomas and Finney. 1998. *Calculus and Analytic Geometry*, *9th ed.* USA: Addison-Wesley

Warsoma dan Wono Setyo Budi. 2007. Diktat Kalkulus I. Bandung: ITB