

## DASAR-DASAR ANALISIS DALAM ILMU MEKANIKA BAHAN

### 1.1. Kedudukan Mekanika Bahan dalam Teknik Sipil

Mekanika bahan merupakan ilmu yang mempelajari karakteristik elemen struktur berkaitan dengan kekuatan (*strength*), kekakuan (*stiffness*) dan stabilitas (*stability*) akibat adanya beban yang bekerja pada sistem struktur.

Suatu sistem struktur pasti dirancang untuk memenuhi fungsi tertentu dan menanggung pengaruh luar yang mungkin terjadi. Sebuah gedung perkantoran berfungsi untuk melindungi komunitas manusia yang melakukan aktifitas di dalamnya, menanggung dan melindungi segala peralatan yang tersimpan di dalamnya, memikul berat sendiri serta mampu menahan beban angin maupun gempa yang mungkin terjadi pada bangunan tersebut.

Beban maupun pengaruh luar yang bekerja pada suatu sistem struktur akan menimbulkan tanggap (*response*) dari sistem struktur itu sendiri. Struktur yang pada awalnya menempati kedudukan awal (*initial configuration*) yang seimbang dengan beban nihil, akan berpindah untuk mencapai kedudukan akhir yang berimbang dengan beban yang bekerja. Perpindahan (*displacement*) pada setiap titik bermateri dalam sistem struktur terjadi secara tidak seragam sehingga menimbulkan deformasi. Hal inilah yang menimbulkan gaya dalam pada setiap elemen struktur, sebagai reaksi akibat bekerjanya beban luar untuk diteruskan ke bagian tumpuan.

Ilmu mekanika bahan ini sangat berguna dalam membantu para ahli di bidang teknik sipil untuk melakukan perancangan struktur secara optimal yang memenuhi persyaratan;

- a.) Setiap elemen harus mampu menahan gaya luar (*external force*) yang bekerja dalam sistem struktur.
- b.) Deformasi yang terjadi akibat bekerjanya beban pada semua elemen struktur tidak boleh terjadi secara berlebihan meskipun kekuatan

material yang digunakan masih mencukupi. Hal ini disebabkan karena deformasi yang terlalu besar akan menyebabkan tidak optimalnya fungsi sistem struktur dan timbulnya rasa tidak aman dan nyaman bagi penggunaannya.

- c.) Pada saat beban bekerja, semua elemen struktur harus tetap dalam kondisi seimbang. Stabilitas struktur yang tidak memadai dapat menimbulkan deformasi tidak diperkirakan sebelumnya, misalnya suatu kolom langsing menanggung beban aksial maka akan timbulnya kemungkinan kegagalan akibat fenomena tekuk (*buckling*).

## 1.2. Asumsi-Asumsi yang digunakan

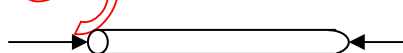
Beberapa anggapan dasar yang sering digunakan dalam berbagai penyelesaian analisis matematis berkaitan dengan mekanika bahan meliputi :

- a.) Kontinuitas (*continuity*). Semua titik bermateri yang ada dalam elemen struktur dianggap selalu berhubungan secara kontinu. Pada kenyataannya tidak ada material kontinu sempurna, karena setiap bahan tersusun dari atom yang juga berongga. Tetapi karena elemen struktur yang diperhitungkan berukuran jauh lebih besar dari jarak susunan atom, maka asumsi ini dapat digunakan.
- b.) Homogen (*homogeneity*). Anggapan ini berarti semua titik bermateri yang ada dalam elemen struktur diasumsikan memiliki sifat (*properties*) yang sama.
- c.) Isotropis (*isotropy*). Semua titik bermateri dalam elemen struktur dianggap memiliki sifat (*properties*) yang sama dalam segala arahnya.
- d.) Tidak ada tegangan awal (*stress-free material*). Hal ini berarti dalam material yang digunakan sebagai elemen struktur bebas dari segala tegangan sisa (*residual stress*) yang mungkin timbul pada proses fabrikasi.
- e.) Memenuhi prinsip Saint Venant yang menyatakan distribusi tegangan yang terdapat pada potonganampang melintang (*cross-section*) dianggap seragam, kecuali pada bagian ujungnya.

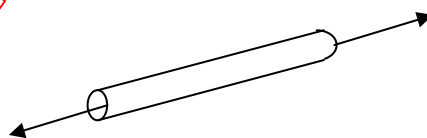
### 1.3. Klasifikasi Elemen Struktur Bangunan Sipil menurut Arah Beban

Dalam bidang Teknik Sipil berbagai elemen struktur dapat dibedakan menurut jenis beban yang bekerja padanya. Jenis-jenis struktur yang sering digunakan antara lain :

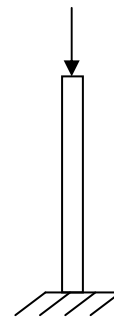
- a.) Elemen Struktur dengan Beban Longitudinal
  - i.) Batang Tekan merupakan elemen struktur dengan beban aksial tarik.
  - ii.) Batang Tarik merupakan elemen struktur dengan beban aksial tekan.
  - iii.) Kolom merupakan batang tekan yang pada umumnya diletakkan dengan posisi vertikal.
- b.) Elemen Struktur dengan Beban Transversal
  - i.) Balok yang pada masing-masing ujungnya diberikan tumpuan.
  - ii.) Kantilever merupakan balok dengan tumpuan jepit pada salah satu ujungnya.
- c.) Elemen Struktur dengan Beban yang bekerja di atas Luasan Bidang
  - i.) Plat merupakan elemen struktur berupa luasan yang pada umumnya diletakkan pada posisi horisontal dengan beban transversal di atasnya.
  - ii.) Panel merupakan sejenis plat dengan posisi vertikal.
  - iii.) Cangkang merupakan elemen struktur sejenis plat yang berbentuk kuryatur.



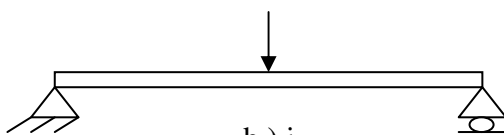
a.) i.



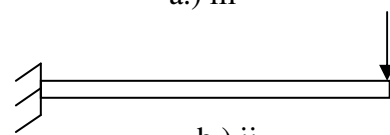
a.) ii



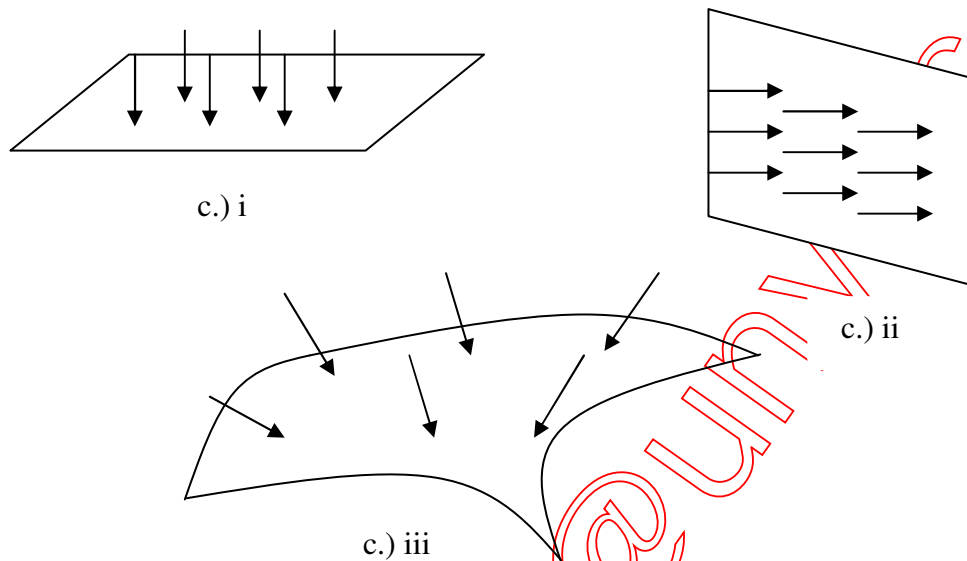
a.) iii



b.) i



b.) ii

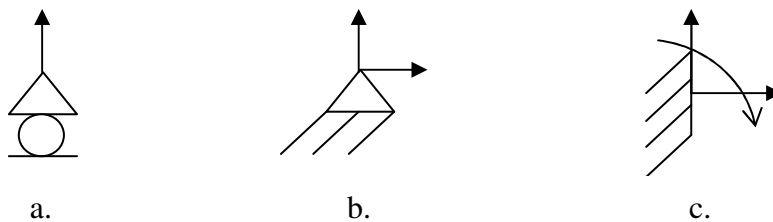


Gambar 1.1. Jenis Elemen Struktur dan Pembebanan

#### 1.4. Tumpuan

Jenis-jenis tumpuan yang sering digunakan dalam bidang teknik sipil dapat dibedakan menurut arah reaksi dan kekangan yang diberikan. Jenis-jenis tumpuan tersebut meliputi :

- a.) Rol merupakan tumpuan yang hanya memberikan reaksi dalam arah vertikal, sehingga terjadi pergerakan dalam arah horisontal dan rotasi.
- b.) Sendi merupakan tumpuan yang memberikan reaksi dalam arah vertikal dan horisontal, sehingga hanya terjadi perpindahan dalam bentuk rotasi.
- c.) Jepit merupakan jenis tumpuan yang mampu memberikan reaksi dalam bentuk gaya arah vertikal, horisontal dan momen sehingga tidak ada lagi pergerakan yang dapat terjadi.



Gambar 1.2. Jenis Tumpuan dan Arah Reaksi

## 1.5. Formulasi Umum Sifat Penampang Datar

Dalam analisis struktur, khususnya mekanika bahan sering kali muncul kebutuhan untuk mendefinisikan sifat-sifat geometris (*geometrical properties*) bidang datar yang digunakan. Misalnya, beban aksial yang bekerja pada suatu batang akan menimbulkan intensitas gaya (tegangan) yang dihitung sebagai besaran gaya per satuan luas penampang, sehingga muncul kebutuhan untuk menentukan luas tampang datar dalam perhitungan tegangan.

Bahasan materi dalam bagian ini mencakup penyajian formulasi dan langkah penghitungan beberapa sifat geometris bidang datar. Sifat-sifat geometris tampang datar (*cross-sectional properties*) yang sering diterapkan dalam mekanika bahan di antaranya; luas, momen statis dan momen inersia.

Semua besaran sifat tampang datar dapat diwakili oleh formulasi terpadu yang ada di bawah ini.

$$M_x^m = \int_A y^m dA \quad (1.1.a)$$

$$M_y^n = \int_A x^n dA \quad (1.1.b)$$

$$M_x^m y^n = \int_A y^m x^n dA \quad (1.1.c)$$

$$M_r^n = \int_A r^n dA = \int_A (x^2 + y^2)^{n/2} dA \quad (1.1.d)$$

di mana  $M_x^m$  merupakan momen ke- $m$  dari tampang datar terhadap sumbu X,  $M_y^n$  momen ke- $n$  terhadap sumbu Y dan  $M_r^n$  adalah momen ke- $n$  dari tampang datar terhadap sumbu Z, sedangkan  $M_x^m y^n$  merupakan momen sentrifugal tampang datar.

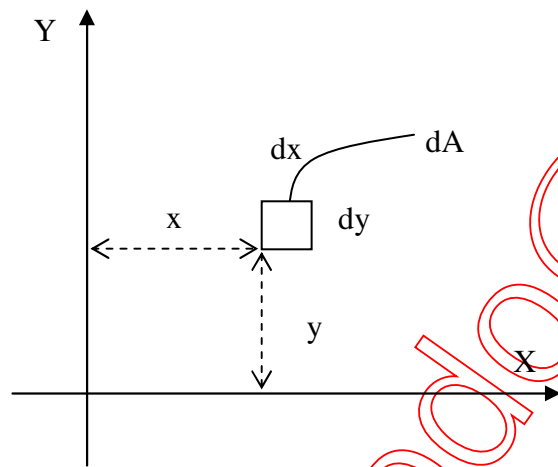
## 1.6. Luas Penampang

Luas tampang (A) merupakan luas bidang datar yang dihitung menurut fungsi sumbu X dan Y, mewakili luas tampang melintang elemen struktur yang menanggung beban di atasnya. Rumus untuk menghitung luas tampang

merupakan kasus paling khusus dari Persamaan (1.1.) di mana  $m = n = 0$ , sehingga diperoleh Persamaan

$$A = \int_A dA \quad (1.2.)$$

di mana dalam tata sumbu Kartesius misalnya, dapat digunakan bentuk diferensial luas  $dA = dx \cdot dy$ .



Gambar. 1.1. Luasan Tampang datar

### 1.7. Momen Statis

Didefinisikan sebagai momen pertama luasan tampang yang dihitung berdasarkan jarak pusat berat luasan (A) terhadap sumbu yang ditinjau (X dan Y). Rumus yang digunakan untuk menghitung momen statis ini didapatkan dengan menggunakan Persamaan 1.1.a dan 1.1.b dengan nilai  $m = 1$  dan  $n = 1$ , sehingga diperoleh Persamaan berikut :

$$S_x = M_x^1 = \int_A y \, dA \quad (1.3.a.)$$

$$S_y = M_y^1 = \int_A x \, dA \quad (1.3.b.)$$

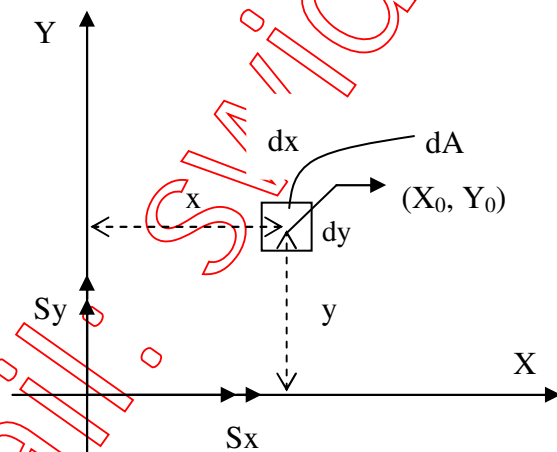
## 1.8. Pusat Berat Penampang

Titik berat suatu penampang dapat dipandang sebagai sebuah titik, yang jika seluruh permukaan dipusatkan (*lumped*) di sana, akan memberikan momen statis yang nilainya sama terhadap kedua sumbu atau terhadap sumbu manapun juga, dengan kata lain momen statis suatu penampang terhadap semua garis yang melalui pusat berat penampang selalu bernilai nol.

Koordinat pusat berat tampang dapat dihitung menggunakan Persamaan di bawah ini;

$$X_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\int x.dA}{\int_A dA} \quad (1.4.a.)$$

$$Y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{\int y.dA}{\int_A dA} \quad (1.4.b.)$$



Gambar. 1.2. Momen Statis Tampang datar

## 1.9. Momen Inersia

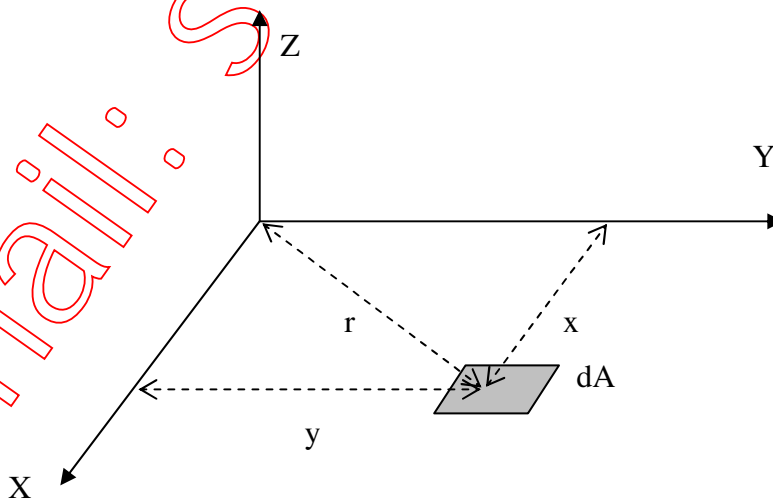
Momen Inersia ( $I_x$  dan  $I_y$ ) merupakan momen kedua dari luasan tampang (A) yang dihitung menurut kwadrat jarak antara pusat berat luasan (A) dengan sumbu yang ditinjau (X dan Y), sedangkan momen inersia (J) yang dihitung terhadap sumbu yang tegak lurus luasan tampang (sumbu Z) disebut sebagai momen inersia polar. Nilai ketiga jenis momen inersia tersebut ( $I_x$ ,  $I_y$  dan J) selalu berharga positif. Momen sentrifugal ( $I_{xy}$ ) yang dihitung berdasarkan jarak luasan tampang terhadap sumbu X dan Y dapat mengambil semua nilai real (positif, negatif maupun nol). Rumus yang digunakan untuk menghitung momen statis ini didapatkan dengan menggunakan Persamaan 1.1.a dan 1.1.b dengan nilai  $m = 2$  dan  $n = 2$ , nilai  $m = n = 1$  pada Persamaan 1.1.c dan nilai  $n = 2$  pada Persamaan 1.1.d, sehingga diperoleh Persamaan berikut :

$$I_x = M_x^2 = \int_A y^2 dA \quad (1.5.a.)$$

$$I_y = M_y^2 = \int_A x^2 dA \quad (1.5.b.)$$

$$I_{xy} = M_x^1 y^1 = \int_A yx dA \quad (1.5.c.)$$

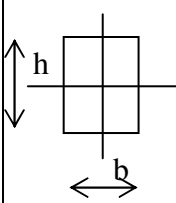
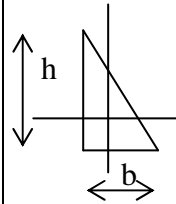
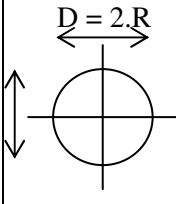
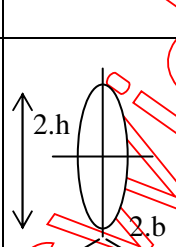
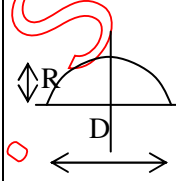
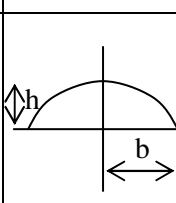
$$J = M_r^2 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x \quad (1.5.d.)$$



Gambar. 1.3. Momen Inersia Tampang datar



Tabel 1.1. Momen Inersia Tampang yang Sering Digunakan

Bentuk Tampang	$\bar{X}_0$	$\bar{Y}_0$	Momen Inersia Tampang
Empat Persegi Panjang 	$b/2$	$h/2$	$I_x = b \cdot h^3 / 12$ $I_y = h \cdot b^3 / 12$ $J_o = (b \cdot h^3 + h \cdot b^3) / 12$ $I_{xy} = 0$
Segitiga Siku-Siku 	$b/3$	$h/3$	$I_x = b \cdot h^3 / 36$ $I_y = h \cdot b^3 / 36$ $J_o = (b \cdot h^3 + h \cdot b^3) / 36$ $I_{xy} = -b^2 \cdot h^2 / 72$
Lingkaran 	$D/2$	$D/2$	$I_x = \pi \cdot D^4 / 64 = \pi \cdot R^4 / 4$ $I_y = \pi \cdot D^4 / 64 = \pi \cdot R^4 / 4$ $J_o = \pi \cdot D^4 / 32 = \pi \cdot R^4 / 2$ $I_{xy} = 0$
Ellipse 	$h$	$b$	$I_x = \pi \cdot b \cdot h^3 / 4$ $I_y = \pi \cdot h \cdot b^3 / 4$ $J_o = \pi \cdot b \cdot h (h^2 + b^2) / 4$ $I_{xy} = 0$
Setengah Lingkaran 	$D/2$	$4 \cdot R / 3 \cdot \pi$	$I_x = \pi \cdot R^4 \cdot (1/8 - 8/9\pi^2)$ $I_y = \pi \cdot R^4 / 8$ $J_o = \pi \cdot R^4 \cdot (1/4 - 8/9\pi^2)$ $I_{xy} = 0$
Semi-ellipse 	$b$	$4 \cdot h / 3 \cdot \pi$	$I_x = \pi \cdot b \cdot h^3 \cdot (1/8 - 8/9\pi^2)$ $I_y = \pi \cdot h \cdot b^3 / 8$ $J_o = \pi \cdot b \cdot h (h^2 / 8 - 8h^2 / 9\pi^2 + b^2 / 8)$ $I_{xy} = 0$

### 1.10. Radius Girasi

Radius (jari-jari) girasi didefinisikan sebagai sebagai letak suatu titik terhadap tata sumbu yang melalui pusat berat tampang, di mana apabila seluruh permukaan dipusatkan di sana akan memberikan momen inersia yang sama terhadap sumbu tersebut. Dalam bentuk Persamaan matematis dapat dinyatakan bahwa :

$$r_x^2 \cdot A = I_x \quad (1.6.a)$$

$$r_y^2 \cdot A = I_y \quad (1.6.b)$$

$$r_z^2 \cdot A = J \quad (1.6.c)$$

Selanjutnya radius girasi  $r_x$ ,  $r_y$  dan  $r_z$  dinyatakan dalam rumus :

$$r_x = \left( \frac{I_x}{A} \right)^{1/2} \quad (1.7.a)$$

$$r_y = \left( \frac{I_y}{A} \right)^{1/2} \quad (1.7.b)$$

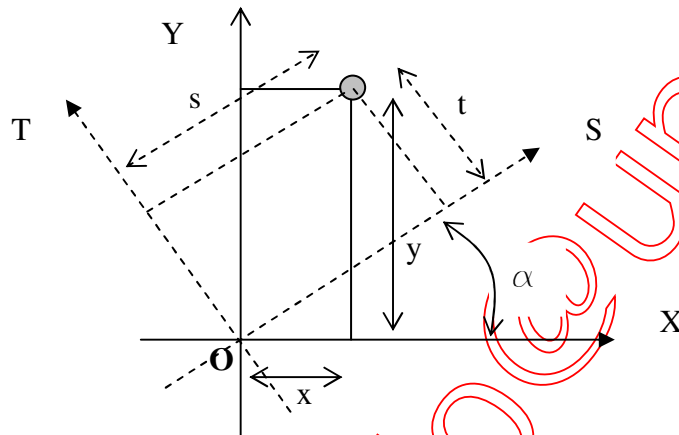
$$r_z = \left( \frac{J}{A} \right)^{1/2} \quad (1.7.c)$$

Besaran radius girasi memberikan indikasi tendensi penyebaran permukaan tampang relatif terhadap pusat berat. Untuk luas tampang ( $A$ ) yang sama dengan nilai radius girasi yang lebih besar maka semakin jauh pula titik-titik permukaan menyebar dari pusat permukaan tampang, dan semakin kecil jari-jari girasi maka semakin dekat sebaran titik-titik permukaan dari pusat berat. Radius (jari-jari) girasi terhadap sumbu X dan Y ( $r_x$  dan  $r_y$ ) selalu bernilai positif.

### 1.11. Transformasi Sumbu

Pemutaran tampang melintang (*cross-section*) dengan kemiringan sudut tertentu akan menyebabkan berubahnya nilai besaran sifat geometris tampang,

yang disebabkan terjadinya perubahan jarak antara pusat berat luasanampang terhadap sumbu Kartesian yang digunakan sebagai acuan perhitungan sifat geometris tampang. Pemutaran sumbu pada suatu tampang datar dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1.4. Transformasi Sumbu Kartesian

Berdasarkan Gambar 1.4 yang mengilustrasikan perputaran sumbu Kartesian dengan kemiringan sudut  $\alpha$ , dapat diperoleh Persamaan matematis sebagai berikut :

$$s = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \quad (1.8.a)$$

$$t = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \quad (1.8.b)$$

Persamaan di atas jika diubah dalam bentuk matrix, dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Selanjutnya sifat-sifat tampang datar dalam orientasi sumbu Kartesian baru, yang meliputi momen statis (S) terhadap sumbu S maupun T dan momen inersia (I) terhadap sumbu S maupun T juga berubah, sesuai dengan perubahan fungsi jarak terhadap titik referensinya (O).

Momen statis terhadap sumbu yang baru berubah menjadi :

$$S_s = \int_0^A t.dA = -x.\sin \alpha.A + y.\cos \alpha.A = S_x.\cos \alpha - S_y.\sin \alpha \quad (1.10.a.)$$

$$S_t = \int_0^A s.dA = x.\sin \alpha.A + y.\cos \alpha.A = S_x.\cos \alpha + S_y.\sin \alpha \quad (1.10.b.)$$

Dalam bentuk Persamaan matrix dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{Bmatrix} S_s \\ S_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} \quad (1.11.)$$

Momen inersia dalam perputaran tata sumbu dapat dituliskan dalam bentuk Persamaan berikut :

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^A t^2.dA = (-x.\sin \alpha + y.\cos \alpha)^2.dA \\ I_s &= \int_0^A x^2.dA.\sin^2 \alpha + \int_0^A y^2.dA.\cos^2 \alpha - 2.\int_0^A x.y.dA.\sin \alpha.\cos \alpha \\ I_s &= I_y.\sin^2 \alpha + I_x.\cos^2 \alpha - 2.I_{xy}.\sin \alpha.\cos \alpha \\ I_s &= I_y.\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) + I_x.\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) - 2.I_{xy}.\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right) \\ I_s &= \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\cos 2\alpha - I_{xy}.\sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1.12.)$$

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^A s^2.dA = (x.\cos \alpha + y.\sin \alpha)^2.dA \\ I_t &= \int_0^A x^2.dA.\cos^2 \alpha + \int_0^A y^2.dA.\sin^2 \alpha + 2.\int_0^A x.y.dA.\cos \alpha.\sin \alpha \\ I_t &= I_y.\cos^2 \alpha + I_x.\sin^2 \alpha + 2.I_{xy}.\sin \alpha.\cos \alpha \\ I_t &= I_y.\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + I_x.\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) + 2.I_{xy}.\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right) \\ I_t &= \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\cos 2\alpha + I_{xy}.\sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1.13.)$$

Nilai momen inersia sentrifugal dapat diperoleh dari Persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
I_{st} &= \int_0^A s.t.dA = (x.\cos\alpha + y.\sin\alpha).(-x.\sin\alpha + y.\cos\alpha).dA \\
I_{st} &= -\int_0^A x^2.dA.\cos\alpha.\sin\alpha + \int_0^A y^2.dA.\sin\alpha.\cos\alpha - \int_0^A x.y.dA.\sin^2\alpha + \int_0^A x.y.dA.\cos^2\alpha \\
I_{st} &= -I_y.\cos\alpha.\sin\alpha + I_x.\sin\alpha.\cos\alpha - I_{xy}.\sin^2\alpha + I_{xy}.\cos^2\alpha \\
I_{st} &= -I_y.\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right) + I_x.\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - I_{xy}.\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) + I_{xy}.\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) \\
I_{st} &= \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\sin 2\alpha + I_{xy}.\cos 2\alpha \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Nilai ekstrim momen inersia serta arah tata sumbu yang bersangkutan (yang ditentukan oleh sudut rotasi  $\alpha$  relatif terhadap sumbu X) dapat diperoleh dengan menyamakan turunan terhadap  $\alpha$  dengan nol, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
I_s &= \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\cos 2\alpha - I_{xy}.\sin 2\alpha \\
\frac{dI_s}{d\alpha} &= -2.\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\sin 2\alpha - 2.I_{xy}.\cos 2\alpha \\
0 &= -2.\left(I_{xy}.\cos 2\alpha + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right).\sin 2\alpha\right) \\
2.I_{xy}.\cos 2\alpha + (I_x - I_y).\sin 2\alpha &= 0 \\
-2.I_{xy}.\cos 2\alpha &= (I_x - I_y).\sin 2\alpha \\
\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} &= -\frac{2.I_{xy}}{(I_x - I_y)} \\
\tan 2\alpha_s &= -\frac{2.I_{xy}}{(I_x - I_y)} \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Analog Persamaan di atas maka diperoleh :

$$\tan 2\alpha_t = -\frac{2.I_{xy}}{(I_x - I_y)} \tag{1.16}$$

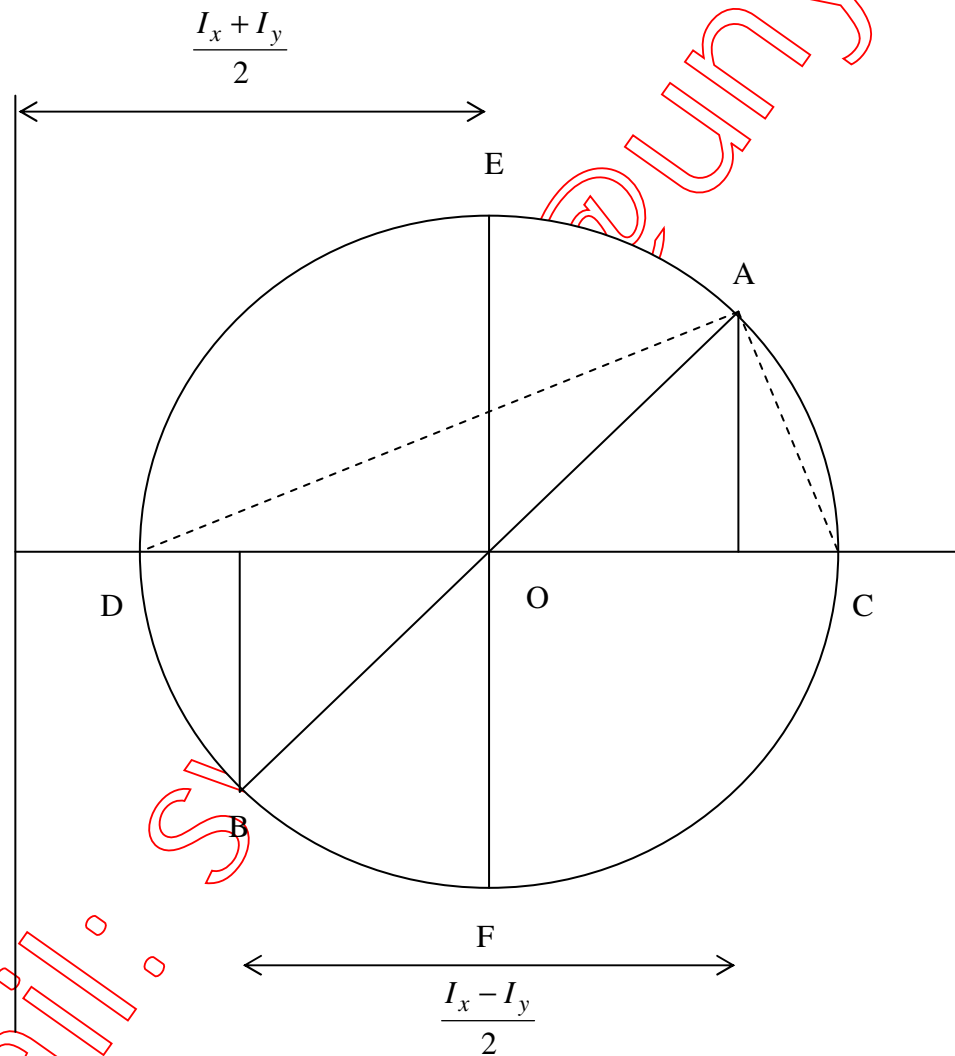
Sudut putar untuk mendapatkan nilai momen inersia sentrifugal ekstrim dapat diperoleh menurut Persamaan di bawah ini :

$$\begin{aligned}
 I_{st} &= \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha \\
 \frac{dI_{st}}{d\alpha} &= 2 \cdot \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\
 0 &= 2 \cdot \left( \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha \right) \\
 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin 2\alpha &= (I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha \\
 \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} &= + \frac{I_x - I_y}{2 \cdot I_{xy}} \\
 \tan 2\alpha_{st} &= + \frac{(I_x - I_y)}{2 \cdot I_{xy}} \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Analisis sifat tampang datar akibat transformasi sumbu juga dapat dilakukan dengan cara grafis yang dikenal dengan Metode Lingkaran Mohr. Keandalan metode ini sangat tergantung pada kecermatan penggambaran, ketelitian pengukuran skala dan sudut putar. Berikut ini disampaikan urutan langkah penggambaran Lingkaran Mohr untuk analisis sifat tampang datar :

- a.) Tentukan suatu tata sumbu Kartesius dengan besaran  $I_x$  dan  $I_y$  diukurkan pada sumbu absis dan besaran  $I_{xy}$  pada ordinat dengan skala yang tepat.
- b.) Tentukan titik O sebagai pusat lingkaran dengan nilai  $(I_x + I_y)/2$  pada arah sumbu mendatar.
- c.) Pada titik dengan absis  $I_x$  dan  $I_y$ , masing-masing diukurkan  $I_{xy}$  sebagai ordinat, sehingga diperoleh titik A( $I_x$ ,  $I_{xy}$ ) dan titik B( $I_y$ ,  $-I_{xy}$ ).
- d.) Gambarkan lingkaran dengan pusat titik O( $(I_x + I_y)/2, 0$ ) melalui titik A dan titik B. Jari-jari lingkaran ini dapat dihitung sebesar  $\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$ .
- e.) Perpotongan lingkaran dengan sumbu absis memberikan nilai  $I_x$  dan  $I_y$  ekstrim (maksimum di sebelah kanan (C) dan minimum di sebelah kiri (A)).

- f.) Arah sumbu ekstrim  $\alpha_s = \alpha_t$  untuk mendapatkan inersia maksimum diberikan oleh setengah sudut AOC yang setara dengan besar sudut ADC, atau setengah sudut BOD. Arah sumbu ekstrim  $\alpha_{st}$  diberikan sebagai setengah sudut AOE atau setengah sudut BOF. Dalam hal ini perputaran sumbu dianggap positif jika berlawanan dengan putaran jarum jam.



Keterangan :

A( $I_x, I_{xy}$ )

B( $I_y, -I_{xy}$ )

C( $I_{s \max}, 0$ )

D( $I_{s \min}, 0$ )

E( $0, I_{st \max}$ )

F( $0, I_{st \min}$ )

Gambar 1.5. Lingkaran Mohr untuk Analisis Inersia Tampang

Berdasarkan Gambar 1.5, ada beberapa hal penting yang dapat disampaikan yaitu :

- a.) Tata sumbu yang memberikan nilai  $I_s$  dan  $I_t$  ekstrim membentuk sudut sebesar  $\pi/4$  atau  $45^\circ$  terhadap sumbu yang memberikan nilai  $I_{st}$  ekstrim.
- b.) Pada saat nilai ekstrim untuk  $I_s$  dan  $I_t$  tercapai, maka nilai  $I_{st}$  selalu berharga nol.
- c.) Untuk kasus dengan  $I_{xy} = 0$ , maka nilai  $I_x$  dan  $I_y$  pada sumbu absis juga merupakan nilai  $I_s$  dan  $I_t$  ekstrim.
- d.) Pada kasus dimana nilai  $I_x = I_y$  dan  $I_{xy} = 0$ , maka nilai  $I_s = I_t = I_x = I_y$  untuk semua arah sumbu.
- e.) Nilai  $I_{st}$  ekstrim sama dengan besarnya jari-jari lingkaran mohr yang terbentuk, atau dapat juga dinyatakan sebagai setengah dari selisih momen inersia non-silang maksimum dan minimum  $((I_{s \max} - I_{s \min})/2)$ .

Selanjutnya nilai momen inersia ekstrim dapat dihitung dengan Persamaan di bawah ini :

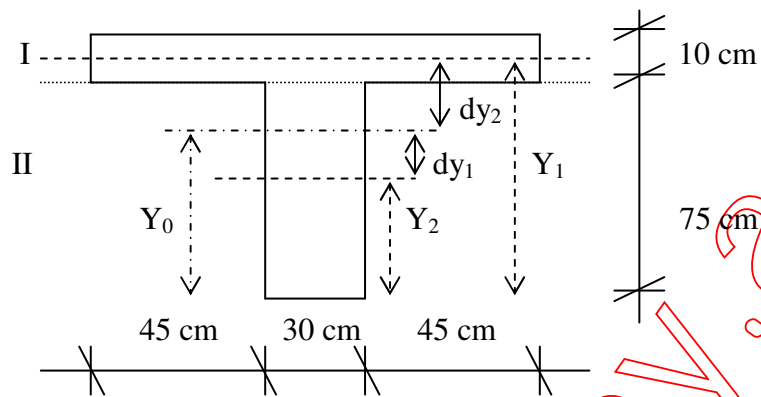
$$I_{\max_s} = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) \pm \left[ \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.18.)$$

$$I_{\max_{st}} = \pm \left[ \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.19.)$$

### 1.12. Contoh Penerapan

**Contoh 1.1. :** Suatu balok yang memiliki bentuk tampang T, dengan ukuran yang tercantum pada Gambar 1.6. Hitung nilai inersia ekstrim dari tampang balok tersebut.





Gambar 1.6. Tampang Melintang Balok T

### Penyelesaian

Untuk mempermudah penyelesaian soal, dapat digunakan tabel perhitungan dengan membagiampang melintang balok menjadi dua bagian luasan.

#### a. Perhitungan sifat tampang dengan acuan sumbu X

Bagian	Luas A (cm <sup>2</sup> )	y (cm)	Sx (cm <sup>3</sup> )	dy (cm)	Ix <sup>0</sup> (cm <sup>4</sup> )	A.dy <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )
I	1200	80,00	96000,00	24,72	10000,00	733294,08
II	2250	37,50	84375,00	-17,78	1054687,50	711288,90
	3450	-	180375,00	-	1064687,50	1444582,98

$$Y = \frac{\sum Sx}{\sum A} = \frac{180375}{3450} = 52,86 \text{ cm}$$

$$I_x = I_x^0 + A.dy^2 = 1064687,50 + 1444582,98 = 2509270,48 \text{ cm}^4$$

**b. Perhitungan sifat tampang dengan acuan sumbu Y**

Bagian	Luas A (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	Sy (cm <sup>3</sup> )	dx (cm)	Iy <sup>0</sup> (cm <sup>4</sup> )	A.dx <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )
I	1200	60	72000	0	1440000	0
II	2250	60	135000	0	168750	0
	3450	-	207000	-	1608750	0

$$X = \frac{\Sigma Sy}{\Sigma A} = \frac{207000}{3450} = 60 \text{ cm}$$

$$I_Y = I_Y^0 + A.dx^2 = 1608750,00 + 0,00 = 1608750,00 \text{ cm}^4$$

**c. Perhitungan momen inersia sentrifugal**

Bagian	Luas A (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	y (cm)	dy (cm)	dx (cm)	A.dx.dy (cm <sup>4</sup> )
I	1200	60	80,00	24,72	0	0
II	2250	60	37,50	-17,78	0	0
	3450	-	-	-	0	0

$$I_{XY} = \Sigma A.dx.dy = 0 \text{ cm}^4$$

**d. Perhitungan momen inersia ekstrim cara analitis**

$$\tan 2\alpha_s = -\frac{2.I_{xy}}{(I_x - I_y)} = -\frac{2.0}{2509270,48 - 1608750,00} = 0$$

$$\alpha_s = 0^0$$

$$I_s = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_s = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2 \cdot 0^\circ - I_{xy} \cdot \sin 2 \cdot 0^\circ$$

$$I_s = \left( \frac{2509720,48 + 1608750,00}{2} \right) + \left( \frac{2509270,48 - 1608750,00}{2} \right) \cdot \cos 0^\circ - 0 \cdot \sin 0^\circ$$

$$I_s = \left( \frac{2509720,48 + 1608750,00}{2} \right) + \left( \frac{2509270,48 - 1608750,00}{2} \right) \cdot 1 - 0 \cdot 0$$

$$I_s = 2059010,24 + 450260,24 - 0$$

$$I_s = 2509270,48 \text{ cm}^4$$

#### e. Perhitungan momen inersia sentrifugal ekstrim cara analitis

$$\tan 2\alpha_{st} = + \frac{(2509270,48 - 1608750,00)}{2 \cdot 0}$$

$$\tan 2\alpha_{st} = \infty$$

$$\alpha_{st} = 45^\circ$$

$$I_{st} = \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

$$I_{st} = \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ + I_{xy} \cdot \cos 2 \cdot 45^\circ$$

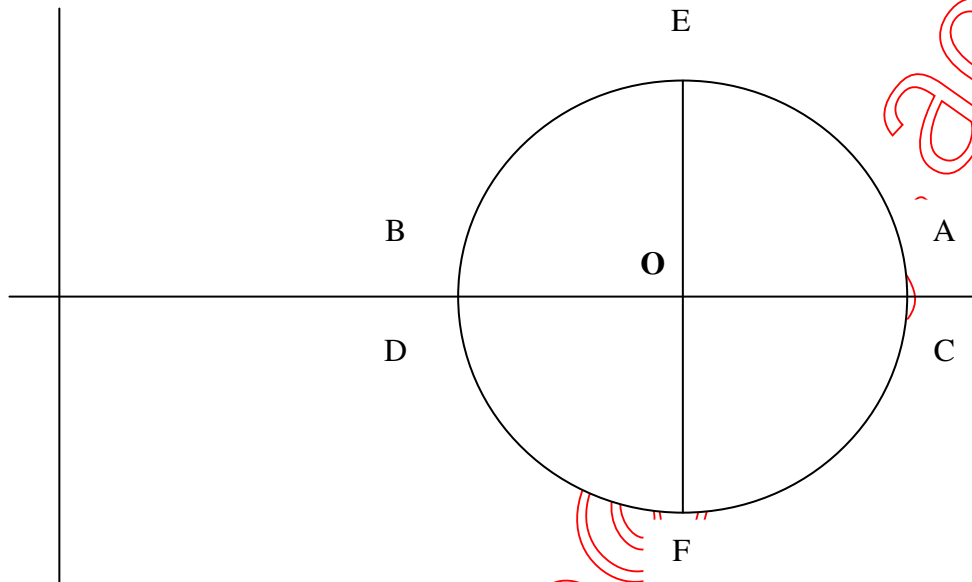
$$I_{st} = \left( \frac{2509270,48 - 1608750,00}{2} \right) \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ$$

$$I_{st} = \left( \frac{2509270,48 - 1608750,00}{2} \right) \cdot 1 + 0 \cdot 0$$

$$I_{st} = 450260,24 + 0$$

$$I_{st} = 450260,24 \text{ cm}^4$$

**f. Penentuan momen inersia ekstrim dengan lingkaran Mohr**



**Gambar 1.7. Lingkaran Mohr**

Berdasarkan Gambar di atas dapat ditentukan secara skalatis bahwa

i.) Besarnya momen inersia ekstrim pada titik C berimpit dengan titik A, maka  
 $I_{s \max} = I_x = 2509270,48 \text{ cm}^4$

ii.) Besarnya sudut putar untuk mendapatkan momen inersia ekstrim pada titik C dapat diukur menurut sudut AOC

$$2 \cdot \alpha_s = 0^\circ$$

$$\alpha_s = 0^\circ$$

iii.) Besarnya momen inersia sentrifugal ekstrim pada titik E dapat diukur menurut jari-jari lingkaran Mohr, atau sebesar

$$I_{st \max} = R = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = \frac{2509270,48 - 1609750,00}{2}$$

$$= 450260,24 \text{ cm}^4$$

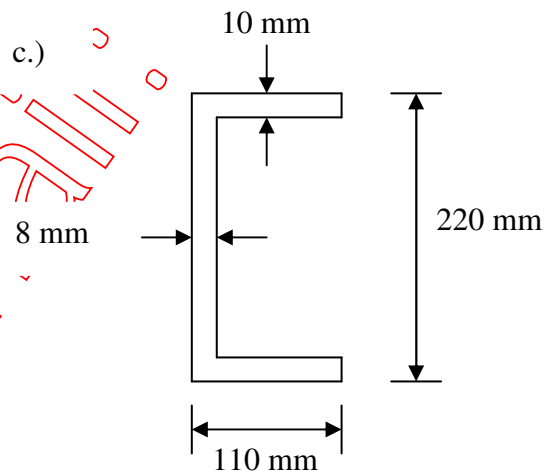
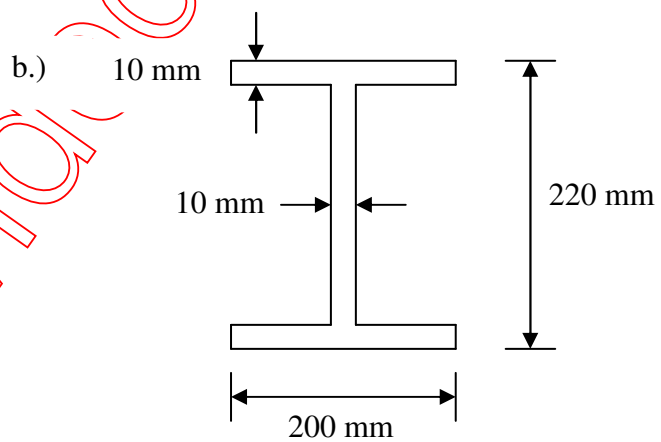
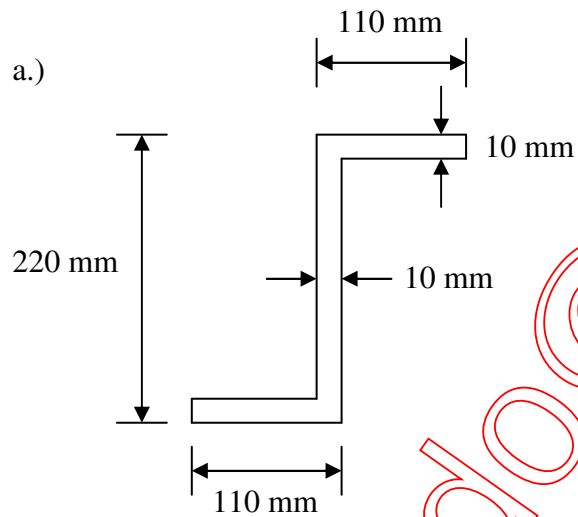
iv.) Besarnya sudut putar untuk mendapatkan momen inersia sentrifugal ekstrim pada titik E dapat diukur menurut sudut AOE

$$2 \cdot \alpha_{st} = 90^\circ$$

$$\alpha_{st} = 45^\circ$$

### Soal Latihan

- 1.1. Tentukan besaran sifat-sifat tampang berikut nilai momen inersia ekstrim dari bentuk-bentuk penampang yang tergambar di bawah ini :



E-mail: [Swidodo@uny.ac.id](mailto:Swidodo@uny.ac.id)