

Materi Olimpiade Tingkat Sekolah Dasar

BIDANG ALJABAR

Caturiyati, M.Si.
Jurdik Matematika FMIPA UNY
wcaturiyati@yahoo.com

Operasi Dasar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian)

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam pengerjaan operasi dasar:

- Penjumlahan dan pengurangan mempunyai tingkatan yang sama.
- Perkalian dan pembagian mempunyai tingkatan yang sama.
- Perkalian dan pembagian mempunyai tingkatan yang lebih tinggi dibanding penjumlahan dan pengurangan.
- Pada operasi hitung campuran setingkat, pengerjaan didahulukan pada operasi yang ada di sebelah kiri.
- Jika terdapat tanda kurung pada suatu operasi hitung campuran, maka yang berada dalam tanda kurung dikerjakan lebih dahulu.

Barisan dan Deret Aritmetika

Barisan Aritmetika

adalah susunan bilangan yang memiliki pola selisih dua bilangan berdekatan sama.

Diberikan barisan aritmetika sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$$

dengan U_1 adalah suku pertama, U_2 adalah suku kedua, ..., U_n adalah suku ke- n .

Selisih atau beda dua suku berdekatannya adalah : $b = U_2 - U_1$ atau $b = U_3 - U_2$

atau secara umum dirumuskan sebagai: $b = U_n - U_{n-1}$

Suku ke- n memenuhi persamaan: $U_n = a + (n - 1) b$

dengan a adalah suku pertama atau U_1 , n adalah banyaknya suku, b adalah beda.

Deret aritmetika

adalah penjumlahan suku-suku pada barisan aritmetika.

Dapat dituliskan sebagai berikut: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$

Jumlah n suku pertama dirumuskan: $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1) b)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$.

Barisan dan Deret Geometri

Barisan Geometri

adalah susunan bilangan yang memiliki pola perbandingan dua suku berdekatan yang tetap.

Jika diberikan barisan geometri sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$$

dengan rasio adalah $r = \frac{U_2}{U_1}$ atau $r = \frac{U_3}{U_2}$ atau secara umum dirumuskan sebagai:

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}.$$

Maka suku ke- n nya memenuhi persamaan: $U_n = ar^{n-1}$, dengan a adalah suku pertama.

Deret Geometri

adalah penjumlahan suku-suku pada barisan geometri.

Jumlah n suku pertama dirumuskan sebagai berikut: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, untuk $r < 1$,

dan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, untuk $r > 1$.

Sifat Operasi Dasar

Diberikan a , b , dan c adalah suatu bilangan maka

1. $a + a = 2a$; $a + a + a = 3a$; atau secara umum $\underbrace{a + a + \dots + a}_n = na$
2. $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dan $(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$
3. $a \times b = ab$; jika $a = b$ maka $a \times a = a^2$
4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$5. \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Operasi Khusus

adalah operasi hitung yang didefinisikan secara khusus.

Contoh: $a * b = a^2 - b$

Bilangan Hasil Bagi

Untuk bilangan yang tidak habis dibagi oleh bilangan yang lain, maka akan ada bilangan lain sebagai sisa hasil baginya. Misalnya $15 : 2$ akan diperoleh 7 namun tersisa 1. Maka persamaan untuk bentuk pembagian tersebut adalah

$15 = (2 \times 7) + 1$, dengan 2 adalah bilangan pembagi, 7 adalah bilangan hasil bagi, dan 1 adalah bilangan sisa hasil bagi.

Secara umum dirumuskan sebagai berikut: $a = (r \times n) + m$

dengan a adalah bilangan yang dibagi, r adalah bilangan pembagi, n adalah bilangan hasil bagi, dan m adalah bilangan sisa hasil bagi.

Bilangan kelipatan n adalah bilangan yang habis dibagi dengan n .

KPK dan FPB

Diberikan dua bilangan a dan b , KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil) adalah kelipatan terkecil dari a dan b . Sedangkan FPB (Faktor Persekutuan Terbesar) adalah faktor terbesar dari dua bilangan a dan b .

Pecahan Sederhana

adalah penyajian bilangan dalam bentuk pembilang dibagi dengan penyebut.

Atau dapat dinotasikan sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a adalah pembilang dan b adalah penyebut.

- Penjumlahan atau pengurangan dua buah pecahan sederhana dapat dilakukan jika penyebut kedua pecahan tersebut sama. Sehingga jika penyebut kedua

pecahan belum sama, maka kedua penyebut perlu disamakan dengan mencari KPKnya.

- Perkalian dua buah pecahan sederhana adalah melakukan operasi perkalian antar pembilang dan operasi perkalian antar penyebut.
- Pembagian dua pecahan sederhana adalah melakukan perkalian kedua pecahan, namun pecahan kedua dibalik dahulu, $\frac{a}{b}$ menjadi $\frac{b}{a}$.
- Jika a dan b adalah bilangan yang berurutan, dengan $a > b$, maka
$$\frac{1}{b \times a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}.$$

Pecahan Desimal

adalah penyajian pecahan dalam bentuk a,b dengan a adalah bagian bulatnya dan b adalah bagian pecahnya.

Persen

adalah pecahan yang disajikan dalam bentuk % atau per seratus.

Contoh-contoh Soal:

1. Tentukan nilai dari $(a+b)^2 - (a^2 + b^2)$

Jawab:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a^2 + b^2) &= (a^2 + 2ab + b^2) - a^2 - b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 \\ &= 2ab.\end{aligned}$$

2. Jumlah dua buah bilangan bulat adalah 17 dan selisihnya adalah 5. Tentukan hasil kali kedua bilangan tersebut.

Jawab:

Misal kedua bilangan bulat tersebut adalah a dan b , dengan $a > b$.

Diketahui $a + b = 17$ dan $a - b = 5$. Jika kedua persamaan dijumlahkan

$$a + b = 17$$

$$\underline{a - b = 5}_+$$

$2a = 22$ atau $a = 11$. Sehingga dari persamaan $a + b = 17$, diperoleh $b = 6$.

Jadi, hasil kali kedua bilangan tersebut adalah $ab = 11 \times 6 = 66$.

3. Operasi $*$ didefinisikan sebagai $a * b = a^2 - b^2$. Tentukan nilai $((5 * 3) * 2)$

Jawab:

$$\begin{aligned} ((5 * 3) * 2) &= ((5^2 - 3^2) * 2) \\ &= ((25 - 9) * 2) \\ &= (16 * 2) \\ &= (16^2 - 2^2) \\ &= (16 + 2)(16 - 2) \\ &= 18 \times 14 = 252. \end{aligned}$$

4. Jika $4 \# 3 = 7$, $5 \# 2 = 21$, $7 \# 5 = 24$. Tentukanlah nilai $6 \# 5$.

Jawab:

Definisi dari $a \# b = a^2 - b^2$. Sehingga $6 \# 5 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$.

5. Tentukan nilai dari $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2004}\right)$

Jawab:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2004}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2003}{2004} = \frac{1}{2004}.$$

6. Bilangan berapakah yang harus ditambahkan pada pembilang dan penyebut pada pecahan $\frac{1}{4}$ untuk menghasilkan pecahan $\frac{7}{8}$.

Jawab:

Misalkan bilangan tersebut adalah x , maka

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{4+x} = \frac{7}{8} &\Leftrightarrow 8(1+x) = 7(4+x) \\ &\Leftrightarrow 8+8x = 28+7x \\ &\Leftrightarrow 8x-7x = 28-8 \\ &\Leftrightarrow x = 20.\end{aligned}$$

Jadi bilangan tersebut adalah 20.

7. Tentukan nilai dari persamaan berikut: $\left(\left(\sqrt{1+\sqrt{x+4}}+4\right)\times\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}=10.$

Jawab:

$$\begin{aligned}\left(\left(\sqrt{1+\sqrt{x+4}}+4\right)\times\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}=10 &\Leftrightarrow \left(\left(\sqrt{1+\sqrt{x+4}}+4\right)\times\frac{1}{3}\right)\times 5=10 \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\sqrt{1+\sqrt{x+4}}+4\right)\times\frac{1}{3}\right)=2 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\sqrt{x+4}}+4\right)=6 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{x+4}}=2 \\ &\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+4}=4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+4}=3 \\ &\Leftrightarrow x+4=9 \\ &\Leftrightarrow x=5.\end{aligned}$$

8. Jumlah dari: $\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \dots + \frac{1}{98\times 99} + \frac{1}{99\times 100}$ adalah

Jawab:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \dots + \frac{1}{98\times 99} + \frac{1}{99\times 100} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{100}\end{aligned}$$

$$= \frac{50}{100} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}.$$

9. Bilangan terkecil dari kumpulan bilangan $\frac{22}{30}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$, dan $\frac{3}{4}$ adalah

Jawab:

Perhatikan pecahan $\frac{22}{30}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, dan $\frac{2}{3}$. KPK dari penyebutnya adalah 30.

$\frac{22}{30}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, dan $\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{22}{30}, \frac{24}{30}, \frac{25}{30}$, dan $\frac{20}{30}$. Jadi bilangan terkecil dari keempat

pecahan tersebut adalah $\frac{2}{3}$. Kemudian cek untuk pecahan $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$, dengan KPK

kedua penyebutnya adalah 12.

$\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{8}{12}$ dan $\frac{9}{12}$. Jadi bilangan terkecil dari kelima bilangan tersebut adalah

$$\frac{2}{3}.$$

10. Harga sebuah buku bacaan mula-mula Rp. 20.000,00. Jika harga buku tersebut naik 40% kemudian turun 20% dari harga baru. Tentukan harga terakhir buku tersebut?

Jawab:

Besar kenaikan mula-mula adalah

$$40\% \times \text{Rp. } 20.000,00 = \frac{40}{100} \times \text{Rp. } 20.000,00 = \text{Rp. } 8.000,00.$$

Sehingga harga buku menjadi

$$\text{Rp. } 20.000,00 + \text{Rp. } 8.000,00 = \text{Rp. } 28.000,00.$$

Besar penurunan harga adalah

$$20\% \times \text{Rp. } 28.000,00 = \frac{20}{100} \times \text{Rp. } 28.000,00 = \text{Rp. } 5.600,00.$$

Sehingga harga buku menjadi

$$\text{Rp. } 28.000,00 - \text{Rp. } 5.600,00 = \text{Rp. } 22.400,00.$$