SYARAT PERLU DAN CUKUP SOLVABILITAS MASALAH DEKOPLING SEGITIGA BLOK

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR SOLVABILITY OF THE BLOCK TRIANGULAR DECOUPLING PROBLEM

Caturiyati[1] dan Sri Wahyuni[2]

Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah mada

ABSTRACT

In this research we study the block triangular decoupling problem with state feedback for linear systems defined over a principal ideal domain, as a generalization of linear systems over field of real number. Especially, in this paper, we study the necessary and sufficient conditions for its solvability are obtained.
Key words : linear system over rings, block triangular decoupling, feedback reachability submodule.

PENGANTAR

Diberikan sistem (A,B,C) atas daerah ideal utama (d.i.u) $\Re$, dengan $A\in\Re^{nxn}$, $B\in\Re^{nxm}$, dan $C\in\Re^{lxn}$ berturut-turut disebut matriks sistem, matriks masukan (*input*), dan matriks keluaran (*output*). Selanjutnya didefinisikan $X:=\Re^n$, $U:=\Re^m$ dan $Y:=\Re^l$ yang masing-masing merupakan $\Re$-modul bebas. Sistem (A,B,C) untuk sistem waktu diskrit didefinisikan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.1)$$

dengan $x(t)\in X$, $u(t)\in U$, dan $y(t)\in Y$ berturut-turut disebut vektor keadaan (*state vector*), vektor masukan (*input vector*) dan vektor keluaran (*output vector*), t=0,1,2,… . Jika $u=\left(u(t)\right)_{t=0}^{\infty}$ barisan masukan dan syarat awal $x(0)=x_0\in X$, maka solusi sistem (1.1) pada waktu t dinyatakan $x(t;x_0,u)$. Untuk kejadian khusus C=0, sistem (A,B,C) disingkat dengan notasi (A,B). Submodul tercapai (*reachable sumodule*) untuk sistem (A,B), dilambangkan $\langle A|\mathrm{Im}B\rangle$, didefinisikan sebagai :

$\langle A|\mathrm{Im}B\rangle := \mathrm{Im}B + A(\mathrm{Im}B)+\ldots+A^{n-1}(\mathrm{Im}B)\subset X$, dengan ImB adalah image dari B. Submodul $\langle A|\mathrm{Im}B\rangle$ disebut sebagai submodul tercapai berdasarkan fakta bahwa untuk setiap $\tilde{x}\in\langle A|\mathrm{Im}B\rangle$ terdapat waktu $T\geq 0$ dan masukan u sehingga $x(T;0,u)=\tilde{x}$ (**Hautus**,**1982**). Selanjutnya pasangan (A,B) dikatakan tercapai jika memenuhi kesamaan $\langle A|\mathrm{Im}B\rangle = X$.

[1] Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

Pandang sistem (1.1), dan misalkan matriks keluaran C dipartisi menjadi k blok sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix},$$

dengan $C_i \in \Re^{l_i x n}$ dan $l_1+l_2+\ldots+l_k= l$, maka sistem (A,B,C) menjadi $(A,B,\{C_i\}_{i=1}^{k})$, dan menghasilkan sistem berikut:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ \quad y_i(t) = C_i x(t) \quad (i = 1,2,\ldots,k). \end{cases} \tag{1.2}$$

Jika pada sistem tersebut diterapkan suatu feedback berbentuk $u(t) = Fx(t) + \sum_{i=1}^{k} G_i v_i(t)$,

dengan $F \in \Re^{mxn}$, $G_i \in \Re^{mxm}$, dan $v_i(t)$ masukan-masukan baru, maka sistem loop tertutup menjadi $(A+BF, B[G_1,G_2,\ldots,G_k], \{C_i\}_{i=1}^{k})$ yaitu,

$$\begin{cases} x(t+1) = (A+BF)x(t) + \sum_{i=1}^{k} BG_i v_i(t) \\ \quad y_i(t) = C_i x(t) \quad (i = 1,2,\ldots,k). \end{cases}$$

Submodul ketercapaian tipe feedback S_i yang dibangun oleh masukan v_i adalah

$$S_i = \langle A+BF \mid \mathrm{Im}(BG_i) \rangle.$$

Dalam pendekatan geometrik, masalah dekopling segitiga blok untuk sistem linear atas lapangan bilangan real mula-mula dipelajari oleh **Wonham dkk (1970)**, khususnya telah diselidiki syarat perlu dan cukup agar sistem terselesaikan (*solvable*). Karena sistem atas ring merupakan generalisasi dari sistem atas lapangan, maka dipandang perlu untuk membahas masalah dekopling segitiga blok untuk sistem linear atas ring. Hal ini sudah dipelajari oleh **Sontag (1976), Conte dkk (1982)**, dan **Datta dkk (1984)**. Sistem linear atas ring seperti itu menarik untuk dipelajari karena antara lain bisa digunakan untuk mambahas masalah-masalah sistem linear dengan parameter. **Inaba dkk (1988)** telah mempelajari *decoupling* dan *pole assignability* untuk sistem linear atas d.i.u, dan secara essensial hasilnya masih mirip dengan hasil pada sistem linear atas lapangan bilangan real yang dikemukakan oleh **Wonham** (**1979**). Dalam paper ini, akan diuraikan masalah dekopling segitiga blok dengan *feedback* untuk sistem linear atas d.i.u.

Karena jumlah dua submodul ketercapaian tipe feedback belum tentu submodul ketercapaian tipe feedback juga, maka tidak terjamin eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan. Sehingga perlu ditunjukkan syarat perlu agar submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan ada. Sebelumnya ditunjukkan dulu eksistensi submodul (A,B)-invarian terbesar dalam suatu submodul yang diberikan, serta dibahas pula mengenai submodul ketercapaian dan submodul ketercapaian tipe feedback. Selanjutnya sebagai inti dalam paper ini, dibicarakan syarat perlu dan cukup masalah dekopling segitiga blok atas d.i.u $\Re$ supaya mempunyai penyelesaian, dengan pengambilan suatu asumsi eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan.

KONSEP DASAR

Berikut ini diuraikan konsep dasar yang sebagian besar dikutip dari **Adkins** (**1992**) kecuali bila disebut khusus. Misalkan $a \neq 0$ merupakan elemen dalam ring R. Jika ada $b \neq 0$ dalam ring R dengan ab=0, maka a disebut pembagi nol dalam R.

Definisi 2.1. *Ring* R *disebut daerah integral* (d.i) *jika* R *merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak mempunyai pembagi nol. Daerah integral* R *yang setiap idealnya dapat dibangun oleh satu elemen disebut daerah ideal utama* (d.i.u).

Definisi 2.2. *Diberikan grup* (M,+) *dan* R *suatu ring komutatif dengan elemen satuan. Grup* M *disebut modul atas ring* R *atau* M=R-*modul jika terdapat fungsi* . : $R \mathrm{x} M \rightarrow M$ *yang memenuhi aksioma-aksioma*:

1. $\alpha(m+n) = \alpha m + \alpha n$,
2. $(\alpha+\beta)m = \alpha m + \beta m$,
3. $(\alpha\beta)m = \alpha(\beta m)$, dan
4. 1m = m.

untuk setiap $\alpha,\beta \in M$ *dan* $m,n \in M$. *Elemen dalam* R *disebut skalar*.

Diberikan M *adalah* R-modul *dan* $N \subset M$. *Himpunan* N *disebut* R-submodul *dari* M *jika* N *terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan* M *juga* R-modul.

Definisi 2.3. *Diberikan* M *adalah* R-*modul.*

a) *Himpunan* $\{m_1,m_2,\ldots,m_n\} \subset M$ *dikatakan humpunan pembangun dari* M *jika untuk setiap* $m \in M$ *dan ada* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in R$ *berlaku* $m=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\ldots+\alpha_n m_n$.
b) *Himpunan* $\{m_1,m_2,\ldots,m_n\} \subset M$ *dikatakan bebas linear jika untuk setiap* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in R$ *jika* $\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\ldots+\alpha_n m_n=0$ *maka* $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.
c) *Himpunan bagian* $S \subset M$ *dikatakan basis dari* M *jika* S *bebas linear dan merupakan himpunan pembangun untuk* M.
d) *Modul* M *atas* R *dikatakan* R-*modul bebas jika* M *mempunyai basis*.

Jika M adalah R-modul bebas atas ring komutatif R, maka rank(M) menotasikan banyaknya elemen dalam suatu pembangun.

Adkins (**1992**) juga mendefinisikan mengenai direct summand dan direct sum, annihilator dari X untuk mendefinisikan elemen torsi, modul bebas torsi dan modul torsi. Teorema yang digunakan diantaranya yang menyatakan tentang R-modul bebas dan R-submodul bebas. Secara rinci bisa dilihat dalam **Adkins** (**1992**).

Definisi 2.4. (**Conte** dan **Perdon**, **1982**) *Diberikan* R d.i, T *dan* S *submodul-submodul dalam* R-*modul* X, *dengan* $T \subset S$.

a) $Cl_S(T) := \{x \in S \mid ax \in T$ untuk suatu $a \in R, a \neq 0\}$ disebut *Closure dari* T *dalam* S.

b) T *disebut submodul tertutup dalam* S *jika memenuhi* $Cl_S(T) = T$.

Proposisi 2.5. (**Conte** dan **Perdon**, **1982**) *Diberikan* M *dan* N *modul-modul atas* R *dengan* $N \subset M$.

a) $(M/N)_t = \overline{0}$ *jika dan hanya jika* N *tertutup di dalam* M.

b) *Submodul* M *tertutup jika dan hanya jika* M *merupakan direct summand dari* X.

Cohn (**1965**) mendefinisikan tentang infimum dan supremum dari B yaitu sebarang himpunan bagian dari himpunan terurut A, ditulis Inf B dan Sup B.

Teorema 2.6. (**Teorema Cayley hamilton**) (**Brewer**, **1986**)

Jika R *lapangan dan* A *matriks berukuran* nxn *atas* R *maka* A *memenuhi persamaan karakteristiknya yaitu* $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I = 0$ *dengan* 0 *merupakan matriks nol*.

Berikut ini diberikan dasar-dasar Pendekatan Geometri untuk Sistem Linear (1.1).

Definisi 2.7. (**Hautus**, **1982**) *Diberikan* S*submodul dalam* $\mathfrak{R}$-*modul* X.

(i) S*dikatakan submodul* (A,B)-*invarian jika* $AS \subset S + ImB$.

(ii) S*dikatakan submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback jika terdapat* $F \in \mathfrak{R}^{mxn}$ *yang memenuhi* $(A+BF)S \subset S$.

Dengan demikian jika **F**(S;A,B) himpunan semua matriks $F \in \mathfrak{R}^{mxn}$ yang memenuhi sifat $(A+BF)S \subset S$dan $\mathbf{F}(S;A,B) \neq \emptyset$, maka S submodul (A,B)-invarian tipe feedback.

Definisi 2.8. (**Wonham**, **1979**) *Diberikan* S*submodul dalam* $\mathfrak{R}$-*modul* X.

(i) S*dikatakan submodul ketercapaian untuk sistem* (A,B) *jika untuk setiap* $\tilde{x} \in$ S*terdapat waktu* $T \geq 0$ *dan barisan masukan* $u = (u(t))_{t=0}^{\infty}$ *sehingga* x(t;0,u) *berada dalam* S*untuk* t=0,1,2,… *dan* $x(T;0,u) = \tilde{x}$.

(ii) S*dikatakan submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B) *jika terdapat* $F \in \mathfrak{R}^{mxn}$ *dan* $G \in \mathfrak{R}^{mxm}$ *sehingga* $S = \langle A + BF \mid Im(BG) \rangle$.

SUBMODUL (A,B)-INVARIAN TERBESAR

Pada bagian ini akan dipaparkan eksistensi submodul (A,B)-invarian terbesar dalam suatu submodul yang diberikan. Sebelumnya akan diuraikan sifat-sifat berikut ini.

Sifat 3.1. *Diberikan* S*submodul* X.

(i) *Jika* S*submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback, maka closure dari* S*dalam* X *juga submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback.*

(ii) *Jika* S*adalah submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback maka* S*adalah submodul* (A,B)-*invarian.*

(iii) *Jika* S_1 *dan* S_2 *adalah submodul-submodul* (A,B)-*invarian maka* S_1+S_2 *juga submodul* (A,B)-*invarian.*

Sifat 3.1.(i) tidak berlaku untuk submodul (A,B)-invarian artinya jika Ssubmodul (A,B)-invarian maka $Cl_X(S)$ belum tentu merupakan submodul (A,B)-invarian. Di dalam sistem linear atas lapangan berlaku hubungan S submodul (A,B)-invarian jika dan hanya jika S submodul (A,B)-invarian tipe feedback (**Hautus**, **1982**). Dalam sistem linear atas ring hanya berlaku jika S submodul (A,B)-invarian tipe feedback maka S submodul (A,B)-invarian. Selanjutnya di dalam sistem linear atas bilangan real, **Wonham** (**1979**), telah menunjukkan adanya subruang supremum dalam keluarga subruang-subruang dalam X, didefinisikan dengan V^*. Ternyata hal tersebut berlaku juga untuk sistem linear atas ring, yaitu jika Ssubmodul dalam X tertentu, $\Im(S;A,B)$ menotasikan subkelas dari semua submodul (A,B)-invarian dalam Syaitu $\Im(S;A,B):=\{V \mid V\in\Im(X;A,B) \& V\subset S\}$, maka $\Im(S;A,B)$ mempunyai supremum V^*, ditulis $V^*:=\sup\Im(S;A,B)$. Dari uraian di atas dapat disimpulkan teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2. (**Wonham**, **1979**) *Diberikan* $A\in\Re^{nxn}$ *dan* $B\in\Re^{nxm}$. *Untuk setiap submodul* $S\subset X$ *terdapat dengan tunggal submodul* (A,B)-*invarian supremum* V^*, *yaitu* $V^*:=\sup$
$\Im(S;A,B)$.

Sehingga Teorema 3.2. menjamin adanya submodul supremum dalam kasus submodul (A,B)-invarian. Dalam hal submodul (A,B)-invarian tipe feedback, sifat 3.1.(iii) belum tentu berlaku, yaitu jumlahan dua submodul (A,B)-invarian tipe feedback, belum tentu submodul (A,B)-invarian tipe feedback. Sehingga dalam hal ini tidak ada jaminan eksistensi submodul supremum.

EKSISTENSI SUBMODUL KETERCAPAIAN TIPE FEEDBACK TERBESAR

Suatu submodul ketercapaian tipe feedback Suntuk sistem (A,B) adalah submodul tercapai untuk sistem baru (A+BF,BG) dengan menerapkan feedback berbentuk u(t)=Fx(t)+Gv(t) ke (1.1), dimana v adalah suatu masukan baru.

Sehingga dapat disimpulkan jika suatu submodul dari X adalah submodul ketercapaian tipe feedback, maka ia merupakan submodul ketercapaian. Tetapi submodul ketercapaian tidak perlu submodul ketercapaian tipe feedback, walaupun di dalam sistem linear atas lapangan bilangan real R dua pernyataan tersebut equivalen.

Lemma 3.3. *Diberikan* S*submodul* X.

(i) S*submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B) *jika dan hanya jika terdapat* $F \in \Re^{mxn}$ *sehingga* $S = \langle A + BF \mid \mathrm{Im}B \cap S \rangle$.

(ii) *Jika* S*adalah submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B), *maka* $S = \langle A + BF \mid \mathrm{Im}B \cap S \rangle$ *untuk semua* $F \in \mathbf{F}(S;A,B)$.

Dari Lemma 3.3.(ii) disimpulkan, jika Sadalah submodul ketercapaian tipe feedback, maka Sadalah submodul (A,B)-invarian tipe feedback dan himpunan **F**(S;A,B) tidak kosong. Selanjutnya suatu submodul ketercapaian tipe feedback tidak perlu tertutup dalam X, dan *closure* dari submodul ketercapaian tipe feedback tidak selalu submodul ketercapaian tipe feedback. Untuk sistem atas lapangan bilangan real R, jumlahan dua subruang ketercapaian tipe feedback juga subruang ketercapaian tipe feedback. Tetapi untuk sistem atas d.i.u $\Re$ tidak berlaku demikian. Sehingga tidak ada jaminan eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan. Teorema berikut ini akan menunjukkan jumlahan dua submodul ketercapaian tipe feedback merupakan submodul ketercapaian.

Teorema 3.4. *Diberikan* S_1*dan* S_2 *adalah submodul ketercapaian tipe feedback maka* S_1+S_2 *submodul ketercapaian* (*tidak selalu tipe feedbak*).

Menurut Teorema 3.4, tidak terjamin adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan. Berikut ini akan ditunjukkan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan, yang akan diuraikan dalam Teorema 3.6 dan Akibat 3.7.

Sebelumnya akan diuraikan dulu Algoritma Submodul Ketercapaian sebagai berikut.

Algoritma 3.5. (**Ito** dan **Inaba**, **1997**) **Algoritma Submodul Ketercapaian** *Diberikan* R *submodul* X, *didefinisikan barisan* $(T^{(i)})$ *adalah barisan submodul-submodul* X *untuk sistem* (A,B) *sebagai berikut*:

$$\begin{cases} T^0(R) := 0, \\ T^i(R) := R \cap (AT^{i-1}(R) + \mathrm{Im}B) \ \ (i = 1,2,\ldots). \end{cases} \tag{3.1}$$

Barisan $(T^{(i)})$ tidak turun, yaitu karena $\Re$ adalah d.i.u terdapat bilangan bulat $q \geq 0$ sedemikian hingga $T^i(R)=T^{i+1}(R)$ untuk $i \geq q$. Didefinisikan himpunan $P(R):=T^q(R)$.

Proposisi berikut akan menunjukkan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan.

Proposisi 3.6. *Diberikan* S*adalah submodul dari* X *dan* V^* *submodul* (A,B)-*invarian terbesar termuat dalam* S. *Jika* $P(V^*)$ *adalah submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback, maka* $P(V^*)$ *adalah submodul ketercapaian tipe feedback terbesar untuk* (A,B) *termuat dalam* S, *dan diberikan sebagai* $P(V^*)=\langle A+BF|\mathrm{Im}B\cap V^*\rangle$, *dimana* F *adalah elemen sebarang dalam* $\mathbf{F}(P(V^*);A,B)$.

Akibat 3.7. *Misalkan* S *adalah submodul* X *dan* V^* *adalah submodul* (A,B)-*invarian terbesar di dalam* S. *Jika* V^* *tertutup dalam* X, *maka* $P(V^*)$ *adalah submodul ketercapaian tipe feedback terbesar untuk* (A,B) *di dalam* S, *dan* $P(V^*)=\langle A+BF|\mathrm{Im}B\cap V^*\rangle$, *dengan* $F\in\mathbf{F}(P(V^*);A,B)$. *Lebih lanjut*, $\mathbf{F}(V^*;A,B)\subset F(P(V^*);A,B)$ *dipenuhi*.

SYARAT PERLU DAN CUKUP MASALAH DEKOPLING SEGITIGA BLOK MEMPUNYAI PENYELESAIAN

Masalah dekopling segitiga blok untuk sistem (1.2) dapat disajikan berikut.

Masalah 4.1. *Masalah dekopling segitiga blok untuk sistem* $(A,B,\{C_i\}_{i=1}^k)$ *atas* $\Re$ *adalah untuk menentukan, jika mungkin, himpunan submodul ketercapaian tipe feedback* $\{S_1, S_2,\ldots, S_k\}$ *untuk* (A,B) *yang memenuhi*

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(S_i;A,B)\neq\varnothing, \tag{4.1}$$

$$S_i\subset\Omega_i, \tag{4.2}$$

$$S_i + \mathrm{Ker}C_i = X,\ i=1,2,\ldots,k. \tag{4.3}$$

Dalam hal ini himpunan $\{S_1,S_2,\ldots,S_k\}$ *dinamakan penyelesaian masalah*.

Untuk sistem atas lapangan bilangan real R, masalah ini pertama kali dipelajari oleh **Wonham dkk** (**1970**) yang telah menunjukkan

$$S_i^* + \mathrm{Ker}C_i = X\ (i=1,2,\ldots,k), \tag{4.4}$$

merupakan syarat perlu dan cukup supaya masalah ini mempunyai penyelesaian, dengan S_i^* adalah subruang ketercapaian tipe feedback terbesar yang termuat dalam Ω_i, i=1,2,…,k, dan $\{S_1^*,S_2^*,\ldots,S_k^*\}$ merupakan penyelesaian. Untuk menyelidiki **Masalah 4.1** dengan pendekatan geometri, diasumsikan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar, dan dengan asumsi tersebut diselidiki apakah (4.4) memenuhi syarat perlu dan cukup sehingga Masalah 4.1 mempunyai penyelesaian.

Asumsi 4.2. *Untuk sistem* $(A,B,\{C_i\}_{i=1}^k)$ *atas d.i.u* $\Re$, *diasumsikan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar* S_i^* *untuk* (A,B) *yang termuat dalam* Ω_i, i=1,2,…,k.

Dari Akibat 3.7, Asumsi 4.2 akan dipenuhi jika setiap V_i^* yaitu submodul (A,B)-invarian terbesar yang termuat dalam Ω_i tertutup dalam X, sedangkan dari Proposisi 3.6, Asumsi 4.2 akan dipenuhi jika setiap submodul $P(V_i^*)$ adalah (A,B)-invarian tipe feedback; sehingga jika Asumsi 4.2 dipenuhi maka dapat disimpulkan bahwa $S_i^* = P(V_i^*)$, dan $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*$ memenuhi

$$S_k^* \subset S_{k-1}^* \subset \ldots \subset S_1^* . \tag{4.5}$$

Sebelum membuktikan teorema utama, akan ditunjukkan terlebih dulu lemma berikut.

Lemma 4.3. *Jika* $S \subset X$ *adalah submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback, maka*

$$\mathbf{F}(S;A,B) \subset \mathbf{F}(Cl_X(S);A,B).$$

Bukti: Ambil sebarang $F \in \mathbf{F}(S;A,B)$, maka menurut Definisi 2.7,

$$\text{untuk setiap } s \in S \text{ berlaku } (A+BF)s \in S. \tag{4.6}$$

Menurut Definisi 2.4, untuk setiap $x \in Cl_X(S)$ terdapat $\alpha \neq 0 \in \Re$ sehingga

$$\alpha x \in S.$$

(4.7)

Dari (4.6) dan (4.7), untuk setiap $x \in Cl_X(S)$ berlaku $\alpha(A+BF)x = (A+BF)(\alpha x) \in S$, yang berarti $(A+BF)x \in Cl_X(S)$. Jadi $(A+BF)Cl_X(S) \subset Cl_X(S)$, yaitu $F \in \mathbf{F}(Cl_X(S);A,B)$.□

Sekarang siap dibuktikan teorema utama berikut:

Teorema 4.4. *Jika sistem* $(A,B,\{C_i\}_{i=1}^k)$ *yang memenuhi* **Asumsi 4.2**, *maka Masalah* 4.1 ***mempunyai penyelesaian***, i.e. *terdapat himpunan submodul ketercapaian tipe feedback* $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *untuk* (A,B) *yang memenuhi* (4.1), (4.2) *dan* (4.3) *jika dan hanya jika*

$$S_i^* + \mathrm{Ker}C_i = X,\ i=1,2,\ldots,k. \tag{4.8}$$

Disini $\{S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*\}$ *adalah penyelesaian* **Masalah 4.1**.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan Masalah 4.1 ***mempunyai penyelesaian***, maka terdapat himpunan submodul ketercapaian tipe feedback $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ untuk (A,B) yang memenuhi (4.1), (4.2) dan (4.3). Akan ditunjukkan persamaan (4.8) berlaku. Karena S_i^* submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B) terbesar yang termuat dalam Ω_i, maka dari (4.2) diperoleh $S_i \subset S_i^*$, $i=1,2,\ldots,k$. Karena itu dari (4.3) berlaku

$$X = S_i + \mathrm{Ker}C_i \subset S_i^* + \mathrm{Ker}C_i \subset X,\ i=1,2,\ldots,k.$$

Jadi $S_i^* + \mathrm{Ker}C_i = X$, $i=1,2,\ldots,k$, yaitu persamaan (4.8) berlaku.

($\Leftarrow$) Jika persamaan (4.8) berlaku; dari definisi S_i^* dan persamaan (4.8) diperoleh himpunan $\{S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*\}$ memenuhi (4.2) dan (4.3), dengan S_i^* berperan sebagai S_i. Tinggal ditunjukkan $\{S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*\}$ memenuhi (4.1), yaitu merupakan penyelesaian Masalah 4.1. Untuk menunjukkan $\{S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*\}$ memenuhi (4.1); **pertama** dari persamaan (4.5), Asumsi 4.2, Sifat 3.1.(i) dan Proposisi 2.5, dapat dipilih submodul-submodul bebas $N_0, N_1, \ldots, N_k$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} X &= N_0 \oplus Cl_X(S_1^*) \\ Cl_X(S_i^*) &= N_i \oplus Cl_X(S_{i+1}^*) \quad (i = 1,2,\ldots,k-1) \\ N_k &:= Cl_X(S_k^*). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sehingga diperoleh

$$X = N_0 \oplus N_1 \oplus \ldots \oplus N_k. \tag{4.10}$$

Karena setiap N_i merupakan modul bebas, maka terdapat basis $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir_i}\}$, dengan r_i rank N_i. Selanjutnya didefinisikan matriks $T_i \in \Re^{n x r_i}$ dan $T \in \Re^{nxn}$ dengan

$$T_i := [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir_i}] \text{ (i=0,1,…,k)}, \; T := [T_0, T_1, \ldots, T_k].$$

Dari (4.10) diperoleh T invertibel atas $\Re$. Dari Asumsi 4.2 setiap S_i^* adalah submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B), menurut Lemma 3.3 maka S_i^* adalah submodul (A,B)-invarian tipe feedback dan memenuhi $\mathbf{F}(S_i^*; A,B) \neq \emptyset$. Sehingga dapat dipilih suatu $F_i \in \mathbf{F}(S_i^*; A,B)$ dan definisikan $F \in \Re^{mxn}$ sebagai berikut

$$F := [0_{mxr_0}, F_1T_1, F_2T_2, \ldots, F_kT_k]T^{-1},$$

diklaim $F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(S_i^*; A, B)$, yaitu $\{S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*\}$ memenuhi (4.1). Untuk membuktikan klaim, diperkenalkan submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B) sebagai berikut

$$\tilde{S}_i := \langle A + BF \mid \operatorname{Im} B \cap S_i^* \rangle \text{ (i=1,2,…,k)}, \tag{4.11}$$

dan pertama akan ditunjukkan bahwa

$$\tilde{S}_i \subset \Omega_i \text{ (i=1,2,…,k)}. \tag{4.12}$$

Untuk membuktikan pernyataan (4.12), perlu dicatat bahwa

$$F = \begin{cases} 0 \text{ pada } N_0 \\ F_i \text{ pada } N_i \ (i = 1,2,\ldots,k) \end{cases}, \tag{4.13}$$

dan dengan Lemma 4.3 diperoleh

$$F_i \in \mathbf{F}(Cl_X(S_i^*); A,B). \tag{4.14}$$

Dari (4.9), (4.13), dan (4.14) diperoleh

$$(A+BF)Cl_X(S_k^*) = (A+BF_k)Cl_X(S_k^*) \subset Cl_X(S_k^*), \tag{4.15}$$

yang menunjukkan $F\in\mathbf{F}(Cl_X(S_k^*);A,B)$. Selanjutnya, untuk suatu j $(2\le j\le k)$ berlaku $F\in\mathbf{F}(Cl_X(S_j^*);A,B)$, atau ekuivalen

$$(A+BF)Cl_X(S_j^*)\subset Cl_X(S_j^*). \tag{4.16}$$

Kemudian dari (4.9), (4.13), (4.14), dan (4.15) berakibat

$$\begin{aligned}(A+BF)Cl_X(S_{j-1}^*) &= (A+BF)(N_{j-1}+Cl_X(S_j^*))\\ &\subset (A+BF_{j-1})N_{j-1}+(A+BF)Cl_X(S_j^*)\\ &\subset Cl_X(S_{j-1}^*)+Cl_X(S_j^*)\\ &= Cl_X(S_{j-1}^*).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Karena itu (4.17), (4.15) dan (4.16) menghasilkan

$$(A+BF)Cl_X(S_i^*)\subset Cl_X(S_i^*)\quad (i=1,2,\ldots,k).$$

Dengan memperhatikan $S_i^*\subset\Omega_i$ dan Ω_i tertutup pada X, diperoleh

$$(A+BF)^{j-1}S_i^*\subset(A+BF)^{j-1}Cl_X(S_i^*)\subset Cl_X(\Omega_i)=\Omega_i,\ (j=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,k),$$

yang dengan (4.11) maka (4.12) dipenuhi. Selanjutnya akan ditunjukkan $S_i^*=\tilde{S}_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$. Karena $\tilde{S}_i$ adalah submodul ketercapaian tipe feedback termuat dalam Ω_i dan S_i^* adalah submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam Ω_i maka berlaku

$$\tilde{S}_i\subset S_i^*\ \ (i=1,2,\ldots,k). \tag{4.18}$$

Untuk menunjukkan $S_i^*\subset\tilde{S}_i$, ditentukan $i(1\le i\le k)$ dan andaikan untuk suatu $j(1\le j\le n\text{-}1)$ berlaku

$$(A+BF_i)^{j-1}(ImB\cap S_i^*)\subset\tilde{S}_i\,. \tag{4.19}$$

Maka,

$$\begin{aligned}(A+BF_i)^{j}(ImB\cap S_i^*) &\subset (A+BF_i)\tilde{S}_i\\ &= [A+BF+B(F_i-F)]\tilde{S}_i\\ &\subset (A+BF)\tilde{S}_i+B(F_i-F)\tilde{S}_i\,.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Untuk sebarang $x\in\tilde{S}_i$ berlaku $B(F_i-F)x\in ImB$, dan dengan memperhatikan $F_i\in\mathbf{F}(S_i^*;A,B)$ dan (4.19), maka

$$B(F_i-F)x=(A+BF_i)x-(A+BF)x\in S_i^*+\tilde{S}_i=S_i^*, \tag{4.21}$$

yaitu $B(F_i-F)\tilde{S}_i\subset ImB\cap S_i^*$. Sehingga dari (4.20) dan (4.11) diperoleh

$$(A+BF_i)^j(ImB\cap S_i^*)\subset(A+BF)\tilde{S}_i+ImB\cap S_i^*\subset\tilde{S}_i\,.$$

Karena dengan (4.11), maka persamaan (4.19) dipenuhi untuk j=1, dan akibatnya (4.19) benar untuk semua $j=1,2,\ldots,n$. Menggunakan Lemma 3.3, diperoleh

$$S_i^* = \langle A + BF_i \mid \mathrm{Im}B \cap S_i^* \rangle = \sum (A+BF_i)^{j-1}(\mathrm{Im}B \cap S_i^*) \subset \tilde{S}_i \;\; (i=1,2,\ldots,k),$$

dan dengan (4.18) diperoleh

$$S_i^* = \tilde{S}_i \;\; (i=1,2,\ldots,k). \qquad (4.22)$$

Persamaan (4.11) dan (4.22) memberikan $S_i^* = \langle A + BF \mid \mathrm{Im}B \cap S_i^* \rangle$ (i=1,2,…,k), yang mengakibatkan $F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(S_i^*; A, B)$. Disimpulkan { $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_k^*$ } memenuhi (4.1). □

KESIMPULAN

Syarat perlu dan cukup agar masalah dekopling segitiga blok untuk sistem linear atas d.i.u (**Masalah 4.1**) mempunyai penyelesaian merupakan generalisasi syarat perlu dan cukup untuk masalah dekopling segitiga blok untuk sistem linear atas lapangan bilangan real. Tetapi karena dalam sistem linear atas d.i.u tidak ada jaminan eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan, maka perlu diberikan suatu asumsi mengenai eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A., and Weintraub, S.H., 1992, "Algebra : An Approach Via Module Theory", Springer-Verlag, New York.

Brewer, J.W., Bunce, J.W., and Van Vleck, F.S., 1986, "Linear Systems Over Commutative Rings", Marcel Dekker, New York.

Cohn, P.M., 1965, "Universal Algebra", Harper & Row, Publishers, New York.

Conte, G. and Perdon, A.M., 1982, "Systems over a principal ideal domain. a polynomial model approach", SIAM J. Control Optim. 20, 112-124.

Datta, K.B., and Hautus, M.L.J., 1984, "Decoupling of multivariable control systems over unique factorization domains", SIAM J. Control Optim. 22, 28-39.

Hautus, M.L.J., 1982, "Controlled Invariance in Systems over Rings", Lecture Notes in Control and Information Sciences 39, Springer-Verlag, New York, 28-39.

Inaba, H., Ito, N., and Munaka, T., 1988, "Decoupling and pole assignment for linear systems defined over principal ideal domains", Linear Circuits, Systems and Signal Processing: Theory and Application, C.I. Byrnes, C.F. Martin, and R.E. Saeks, eds., North-Holland, Amsterdam, 55-62.

Ito. N and Inaba. H., 1997, "Block Triangular Decoupling for Linear Systems over Principal Ideal Domains", Siam J. Control Optim. 35(3), 744-765.

Sontag, E.D., 1976, "Linear systems over commutative rings", a survey, Ricerche di Automatica. 7 , 1-34.

Wonham, W.M., 1979, "Linear Multivariable Control : A Geometric Approach", Springer-Verlag, New York.

Wonham, W.M. and Morse, A.S., 1970, "Decoupling and Pole Assinment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach", SIAM J. Control. 8, 1-18.