

Materi Pembimbingan Olimpiade Matematika SMA

Oleh: Ali Mahmudi, M.Pd.
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Pendahuluan

Terdapat beberapa jenis dan tingkatan lomba atau olimpiade matematika, mulai tingkat kabupaten hingga tingkat internasional. Pada tingkat internasional, di antaranya adalah Olimpiade Matematika Antarnegara Asia Pasifik yang disebut *Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO)* dan Olimpiade Matematika Antarnegara yang disebut *International Mathematics Olympiad (IMO)*. Olimpiade matematika tersebut di antara lain bertujuan untuk (1) menemukan, mendorong, menantang siswa-siswa berbakat matematika, (2) mendorong tumbuhnya kecintaan siswa akan matematika, dan (3) memupuk hubungan persahabatan antarsiswa antarnegara.

Berbeda dengan soal-soal yang biasa diberikan di sekolah yang pada umumnya dapat diselesaikan dengan cara-cara biasa, soal-soal olimpiade, selain memerlukan pemahaman yang baik mengenai konsep-konsep matematika, juga menuntut ketekunan dan kemampuan berpikir kreatif. Ketekunan demikian penting dimiliki siswa mengingat hal ini sangat menentukan keberhasilan siswa. Kebanyakan orang gagal bukan karena tidak jenius, melainkan karena kurangnya kegigihan dan kesungguhan.

Berikut diberikan contoh soal yang memerlukan ketekunan, kecermatan, dan kemampuan berpikir kreatif dalam menyelesaikannya.

Contoh 1

Tentukan nilai x real yang memenuhi persamaan $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$.

Pembahasan

Apabila soal di atas diselesaikan dengan cara biasa, yakni memindahkan salah satu bentuk akar ke ruas kanan, kemudian dikuadratkan, maka kita akan mengalami kesulitan. Akan tetapi, apabila diselesaikan dengan cara tidak biasa, yakni dengan langsung mengkuadratkan kedua ruas, maka hasilnya akan mudah ditemukan.

$$\begin{aligned}\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} &= 2 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{2x - 1} + x - \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} &= 4 \\ \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} &= 4 \\ \Leftrightarrow 2x + 2(x - 1) &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Contoh 2

Matematikawan August De Morgan menghabiskan seluruh usianya pada tahun 1800-an. Pada tahun terakhir dalam masa hidupnya, ia mengatakan bahwa “Dulu aku berusia x tahun pada tahun x^2 ”. Pada tahun berapakah ia lahir?

Pembahasan

Soal ini sulit diselesaikan menggunakan rumus. Penyelesaian soal ini perlu melibatkan intuisi, yakni mencari bilangan yang apabila dikuadratkan hasilnya 1800-an. Bilangan itu adalah $43^2 = 1849$. Jadi, August lahir tahun $1849 - 43 = 1806$.

Contoh 3

Pada segitiga siku-siku ABC diketahui $\cos A \cos B = \frac{1}{4}$. Tentukan nilai $\cos C$.

Pembahasan

Karena $\cos A \cos B = \frac{1}{4}$, maka tidak mungkin segitiga tersebut siku-siku di A atau B.

Dengan demikian haruslah segitiga tersebut siku-siku di C. Jadi, $\cos C = \cos 90^\circ = 0$.

Selanjutnya berikut diberikan contoh-contoh soal yang dapat didiskusikan.

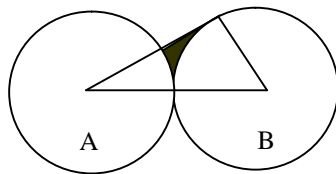
Soal 1

1. Pada suatu konferensi internasional hadir 9 negara, yaitu A, B, C, D, E, F, G, H, dan I. Bendera masing-masing negara akan dikibarkan pada tiang yang diatur menjadi satu baris (9 tiang). Tentukan banyaknya cara mengatur 9 bendera itu agar bendera negara A dan B terletak di ujung.

2. Diketahui trapesium ABCD dengan $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Jika $CD = \frac{1}{2}AB$, tentukan letak

titik P pada sisi \overline{CD} sedemikian sehingga luas trapesium ABCD sama dengan $\frac{3}{2}$ luas segitiga ABP.

3.



Pada gambar di samping, dua lingkaran yang berpusat di A dan B masing-masing berjari-jari 10. Jika kedua lingkaran tersebut saling bersinggungan dan \overline{AC} adalah ruas garis singgung, maka tentukan luas daerah yang berbayang (diarsir).

5. Tentukan rumus yang menyatakan hubungan antara variabel x dengan y jika diketahui data sebagai berikut.

x	0	1	2	3	4	5
y	4	9	20	37	60	89

6. Tentukan n sedemikian sehingga $n! = (2^{15})(3^6)(5^3)(7^2)(11)(13)$.
7. Simbol $[x]$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Hitunglah nilai $daxzri$ $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{48}] + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$
8. Pada suatu kelas matematika, dalam satu semester dilaksanakan beberapa kali tes. Berikut ini adalah tabel nilai matematika dari 32 siswa pada *tes pertama* di kelas tersebut.
- 9.

Nilai	Banyaknya siswa
10	1
30	2
40	2
50	1
60	4
70	6
80	9
90	4
100	3
Jumlah	32

- a. Berapa nilai rata-rata dari 32 siswa tersebut pada tes pertama?
- b. Setelah mengikuti 6 kali tes, Budi mempunyai nilai rata-rata 86. Berapakah nilai rata-ratanya jika ia memperoleh nilai 100 pada tes berikutnya (ketujuh)?

- c. Yuni sudah mengikuti beberapa kali tes pada semester tersebut dan tinggal mengikuti tes terakhir. Yuni berharap agar memperoleh nilai 100 pada tes terakhir agar memperoleh nilai rata-rata 90 pada seluruh tes yang diikutinya pada semester tersebut. Ternyata ia hanya memperoleh nilai 70 pada tes terakhir tersebut. Jika nilai rata-rata Yuni untuk keseluruhan tes yang diikutinya adalah 87, berapa kali Yuni telah mengikuti tes pada semester tersebut?

10. Diketahui barisan $\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$ yang didefinisikan oleh $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+1)^3$ untuk setiap n bilangan bulat. Tentukan nilai a_0 .
11. Angka-angka 49, 29, 9, 40, 22, 15, 53, 33, 13, 47 dikelompokkan dua-dua sedemikian sehingga jumlah setiap pasangan bilangan adalah sama. Bilangan manakah yang merupakan pasangan bilangan 15?
12. Pada sebuah pemilihan ketua kelas, terdapat 4 calon. Jika banyaknya siswa keseluruhan adalah 61 orang, maka tentukan minimal banyaknya suara yang dapat diperoleh seorang calon sehingga ia dapat terpilih menjadi ketua kelas?
13. Sebuah minuman "COKELAT" terdiri atas 6% cokelat murni. Jika 10 liter cokelat murni ditambahkan ke dalam 50 liter pada minuman ini, tentukan persentase banyaknya cokelat murni pada minuman yang baru.
14. Tentukan jumlah semua nilai yang memenuhi $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 + 4x - 60} = 1$.
15. Seorang petani mempunyai 7 sapi, 8 domba, dan 6 kambing. Berapa kambing harus dibeli oleh petani tersebut sehingga setengah dari hewan-hewannya adalah kambing?
16. Hasil kali 2, 3, 5, dan y sama dengan jumlahnya. Berapakah nilai y ?
17. Tentukan nilai dari $(-300) + (-297) + (-294) + \dots + 306 + 309$.
18. Pada suatu referendum, $\frac{3}{5}$ siswa memilih "ya" dan 28% siswa memilih "tidak".
Jika tak terdapat kartu suara yang rusak, berapa persen siswa yang tidak memilih?
19. Bilangan-bilangan: 6, 14, x , 17, 9, y , 10 mempunyai rata-rata 13. Berapa nilai $x + y$?
20. Diketahui $[x(x(x+1)+2)]+3 = x^3 + x^2 + x - 6$. Tentukan nilai x
21. Angka-angka 2, 2, 3, dan 5 secara acak disusun untuk membentuk sebuah bilangan 4 angka. Berapakah probabilitas jumlah angka pertama dan angka terakhir genap?
22. Diketahui $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ dan $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$. Tentukan nilai $P^2 - Q^2$.
23. Tentukan nilai x yang memenuhi $(5 - 3x)^5 = -1$.
24. Jika x dan y masing-masing dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, 5, 10\}$. Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
25. Ali mengerjakan 4 buah tes. Rata-rata skor yang diperoleh Ali pada keempat tes ini adalah 88. Jika maksimum skor yang dapat diperoleh untuk setiap tes adalah 100, tentukan skor terendah yang mungkin diperoleh pada salah satu tersebut.

26. Jika $px + 2y = 7$ dan $3x + qy = 5$ merepresentasikan garis yang sama, tentukan nilai p.
27. Bilangan N dibagi 60 sisanya adalah 49. Tentukan sisanya jika N dibagi 15.
28. Tentukan nilai b pada barisan aritmatika 17, a, b, c, 41.
29. Tentukan banyaknya solusi (P, Q) dari persamaan: $\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = \frac{P+Q}{PQ}$, dengan P dan Q adalah bilangan bulat antara 1 – 9.
30. Jika $x^2 + ax + 48 = (x + y)(x + z)$ dan $x^2 - 8x + c = (x + m)(x + n)$, dengan x, z, m, n adalah bilangan bulat yang terletak antara -50 sampai dengan 50. Tentukan maksimum nilai ac.
31. Perjalanan dari kota A ke kota B membutuhkan waktu 4,5 jam dengan kecepatan rata-rata 70 mil/jam. Berapa jam diperlukan untuk menempuh jarak A dan B jika kecepatannya 60 mil/jam.
32. Jika $[(10^3)(10^x)]^2 = 10^{18}$. Tentukan nilai x.
33. Jumlah 5 bilangan bulat berurutan adalah 75. Tentukan jumlah bilangan terbesar dan terkecil.

34.

1	F	G	H
F	2	J	K
L	M	3	N
P	Q	1	R

Pada persegi di samping, setiap baris, kolom, dan diagonal masing-masing memuat bilangan 1, 2, 3, dan 4. Tentukan nilai dari $K + N$.

35. Selesaikan persamaan: $4(16^{\sin^2 x}) = 2^{6\sin x}$.
36. Dalam suatu kompetisi bola basket, klub GARUDA mempunyai skor total 252 dari 28 kali bertanding. Sedangkan rata-rata skor yang diperoleh klub LION untuk setiap pertandingan adalah 0,5 poin lebih tinggi daripada skor rata-rata klub GARUDA. Jika klub GARUDA bermain 10 kali lebih banyak daripada klub LION, tentukan rata-rata skor total yang diperoleh klub LION.
37. Diketahui tiga bilangan berbeda. Jika setiap bilangan ditambahkan ke rata-rata 2 bilangan lainnya, hasilnya berturut-turut adalah 65, 69, dan 76. Tentukan rata-rata tiga bilangan tersebut.

38. Tentukan banyaknya bilangan bulat x yang memenuhi $\frac{x-1}{3} < \frac{5}{7} < \frac{x+4}{5}$.

39. Diketahui $x + \frac{1}{x} = 4$. Tentukan nilai $x^3 + \frac{1}{x^3}$

40. Dua bilangan berbeda secara acak diambil dari $S = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$. Probabilitas bahwa jumlah 2 bilangan itu sama dengan 12 akan lebih besar jika salah satu bilangan diambil terlebih dahulu dari S . Bilangan manakah itu?

41. Diketahui $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$ dan $\frac{y}{z} = \frac{14}{3}$. Berapakah nilai $\frac{x+y}{z}$?

42. Tentukan gradien sebuah garis yang sejajar dengan garis $2x + 4y = -17$?

43. Jika a sebuah bilangan bulat positif dan diketahui $2x + a = y$; $a + y = x$; dan $x + y = z$. 44. Tentukan maksimum nilai yang mungkin dicapai $x + y + z$.

45. Barisan t_1, t_2, t_3, \dots didefinisikan sebagai: $t_1 = 2$ dan $t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}$.

Tentukan nilai dari t_{999} .

46. Beberapa bilangan bulat harus diletakkan pada tiap kotak di bawah ini. Jika hasil kali sembarang 4 bilangan bersebelahan (terdekat) adalah 120, tentukan nilai x .

		2			4			x			3			

47. Rata-rata 19 bilangan bulat berurutan adalah 99. Tentukan bilangan terbesar.

48. Operasi " Δ " didefinisikan sebagai: $a \Delta b = a^2 + 3^b$. Tentukan nilai dari $(2\Delta 0)\Delta(0\Delta 1)$.

49. Diketahui $a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2001}$ dan $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1001^2}{2003}$

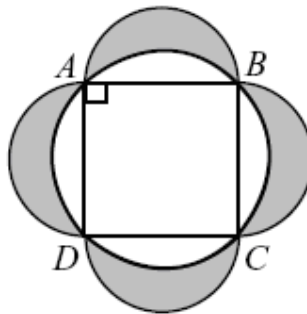
Tentukan bilangan bulat yang paling dekat ke $a - b$.

50. Tentukan rumus yang menyatakan hubungan antara variabel x dengan y jika diketahui data sebagai berikut.

x	0	1	2	3	4	5
y	4	9	20	37	60	89

Soal 3

1. Mr. Anderson has more than 25 students in his class. He has more than 2 but fewer than 10 boys and more than 14 but fewer than 23 girls in his class. How many different class sizes would satisfy these conditions?
2. Stephen had a 10:00 am appointment 60 km from his home. He averaged 80 km/h the trip and arrived 20 minutes late for the appointment. At what time did he leave his home?
3. 11. The value of $490 - 491 + 492 - 493 + 494 - 495 + \dots - 509 + 510$ is ...
4. The time on a digital clock is 5:55. How many minutes will pass before the lock next shows a time with all digits identical?
5. How many different values of k is the 4-digit number $7k52$ divisible by 12?
6. When a positive integer N is divided by 60, the remainder is 49. When N is divided by 15, the remainder is ...
7. Square $ABCD$ with length 2 is inscribed in a circle, as shown. Using each side of the square as a diameter, semi-circular arcs are drawn. The area of the shaded region outside the circle and inside the semi-circle is



8. Five students named Fred, Gail, Iggy, and Joan are seated around a circular table in that order. To decide who goes first in a game, they play “countdown”. Henry starts by saying ‘34’, with Iggy saying ‘33’. If they continue to count down in their circular order, who will eventually say ‘1’?
9. Al and Bert must arrive at town 22,5 km away. They have one bicycle between them and must arrive at the same time. Bert sets out riding at 8 km/h, leaves the bicycle and then walks at 4 km/h, reaches the bicycle and rides at 10 km/h. For how many minutes was the bicycle not in motion?

Materi Pembimbingan Olimpiade Matematika SMA

Bagi Siswa SMA N 1 Godean Sleman Yogyakarta

Disampaikan pada Senin, 29 Maret 2007



Oleh:

Ali Mahmudi, M.Pd.

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

2007