

Program *GeoGebra* untuk Menciptakan Pembelajaran Kalkulus yang Dinamis

Dr. Ali Mahmudi

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Makalah Seminar Nasional Teknologi Matematika
Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNHALU Kendari, 4 Mei 2012

Abstrak

Berbagai penelitian menunjukkan beragam manfaat penggunaan teknologi, khususnya program komputer, dalam pembelajaran matematika. Salah satu program komputer yang relatif mudah digunakan dalam pembelajaran matematika adalah *GeoGebra*. Program ini dapat digunakan untuk mengeksplorasi dan memvisualisasi konsep-konsep matematis yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami siswa. Artikel ini mendeskripsikan pemanfaatan *GeoGebra* dalam pembelajaran kalkulus yang berpotensi dapat menciptakan pembelajaran matematika yang lebih dinamis dan bermakna.

Kata Kunci: GeoGebra, Kalkulus

A. Pendahuluan

Teknologi yang berkembang sangat pesat dapat menghadirkan berbagai jalan kemudahan dalam berbagai bidang kehidupan. Teknologi mampu mengurai kerumitan dan kompleksitas masalah serta mampu memangkas berbagai prosedur sehingga menjadi lebih sederhana. Pesatnya perkembangan teknologi telah membuka peluang dan jalan baru bagi perkembangan berbagai bidang kehidupan, termasuk dalam bidang pendidikan. Saat ini telah banyak teknologi yang dapat dimanfaatkan untuk mendukung proses pendidikan, termasuk dalam proses pembelajaran, sehingga menjadikan pembelajaran lebih dinamis, efisien, dan efektif. Berbagai program komputer, yang merupakan salah satu produk teknologi, secara sengaja telah dikembangkan untuk mendukung proses pembelajaran, termasuk dalam pembelajaran matematika. Program-program tersebut diantaranya adalah *Maple, Matlab, CABRI, Mathematica, Geometry Sketch Pad*, dan *GeoGebra*.

Pada artikel ini akan diuraikan mengenai program *GeoGebra*. Dengan beragam fasilitas yang dimiliki, *GeoGebra* dapat dimanfaatkan sebagai media pembelajaran matematika untuk mendemonstrasikan atau memvisualisasikan konsep-konsep matematis yang bersifat abstrak dan sebagai alat bantu untuk mengkonstruksi konsep-konsep matematis.

B. Pembahasan

1. Program *GeoGebra*

Sesuai namanya, program *GeoGebra* didesain untuk mengaitkan antara aljabar dan geometri. Keterkaitan ini menjadikan *GeoGebra* dapat memberikan fasilitas bagi siswa untuk mengeksplorasi konsep-konsep matematika secara lebih menarik, dinamis, efisien, dan efektif. Program ini dikembangkan oleh Markus Hohenwarter pada tahun 2001. Program ini dapat diperoleh secara bebas dengan mengunduh pada situs **www.geogebra.com**. Saat ini, penggunaan program ini sudah sangat meluas. Tercatat ribuan siswa maupun guru dari sekira 192 negara telah menggunakan program ini (Hohenwarter, 2008).

Program *GeoGebra* melengkapi berbagai program komputer untuk pembelajaran aljabar yang sudah ada, seperti *Derive*, *Maple*, *MuPad*, maupun program komputer untuk pembelajaran geometri, seperti *Geometry's Sketchpad* atau *CABRI*. Menurut Hohenwarter (2008), bila program-program komputer tersebut digunakan secara spesifik untuk membelajarkan aljabar atau geometri secara terpisah, maka *GeoGebra* dirancang untuk membelajarkan geometri sekaligus aljabar secara simultan.

Program *GeoGebra* sangat bermanfaat bagi guru maupun siswa. Tidak sebagaimana pada penggunaan *software* komersial yang biasanya hanya bisa dimanfaatkan di sekolah, *Geogebra* dapat diinstal pada komputer pribadi dan dimanfaatkan kapan dan di manapun oleh siswa maupun guru. Bagi guru, *GeoGebra* menawarkan kesempatan yang efektif untuk mengkreasi lingkungan belajar *online* interaktif yang memungkinkan siswa mengeksplorasi berbagai konsep-konsep matematis. Menurut Lavicza (Hohenwarter, 2010), sejumlah penelitian menunjukkan bahwa *GeoGebra* dapat mendorong proses penemuan dan eksperimentasi siswa di kelas. Fitur-fitur visualisasinya dapat secara efektif membantu siswa dalam mengajukan berbagai konjektur matematis.

Menurut Dikovic (2009), *GeoGebra* merupakan program dinamis yang mendukung proses konstruksi yang melibatkan objek-objek matematis. Program ini juga menyediakan fitur-fitur yang sesuai untuk memanipulasi sistem aljabar komputer, seperti penentuan akar, titik-titik ekstrim, gradien, persamaan garis singgung, turunan, dan integral suatu fungsi. Dengan program ini, siswa juga dapat menuliskan *input* berupa persamaan aljabar atau koordinat dengan mudah. Hal

inihlah yang menjelaskan mengapa program *GeoGebra* merupakan pilihan yang sangat tepat untuk merepresentasikan berbagai objek matematis.

Beberapa pemanfaatan program *GeoGebra* dalam pembelajaran matematika adalah sebagai berikut.

- a. Dapat menghasilkan lukisan-lukisan geometri dengan cepat dan teliti dibandingkan dengan menggunakan pensil, penggaris, atau jangka.
- b. Adanya fasilitas animasi dan gerakan-gerakan manipulasi (*dragging*) pada program *GeoGebra* dapat memberikan pengalaman visual yang lebih jelas kepada siswa dalam memahami konsep geometri.
- c. Dapat dimanfaatkan sebagai balikan/evaluasi untuk memastikan bahwa lukisan yang telah dibuat benar.
- d. Mempermudah guru/siswa untuk menyelidiki atau menunjukkan sifat-sifat yang berlaku pada suatu objek geometri.

Berdasarkan penelitian Embacher (Hohenwarter, 2008), siswa memperoleh manfaat lebih dari program *GeoGebra*. Beberapa siswa memberikan komentar-komentar sebagai berikut.

“Program ini sangat membantu untuk melihat apa yang berubah ketika saya mengubah sesuatu yang lain”.

“Ketika mempelajari konsep turunan, jika kita menggerakkan suatu titik menuju suatu titik yang lain, kita akan menyadari bahwa garis potong berubah menjadi garis singgung”.

“Dengan menggambar pada kertas, kita tidak mampu memvisualisasikan apa yang akan terjadi”.

“Dengan program ini, kita dapat berkesperimen secara luas dan bebas serta mencoba banyak hal untuk menemukan solusi sendiri terhadap suatu masalah”

Dikovic (2009) juga mengungkapkan berbagai manfaat program *GeoGebra*, yaitu sebagai berikut.

- a. Dibandingkan kalkulator grafik, *GeoGebra* lebih familiar dan mudah digunakan atau *user friendly*. Program ini menawarkan *interface* yang mudah digunakan dan menyediakan berbagai menu, perintah, dan bantuan yang sederhana dan jelas

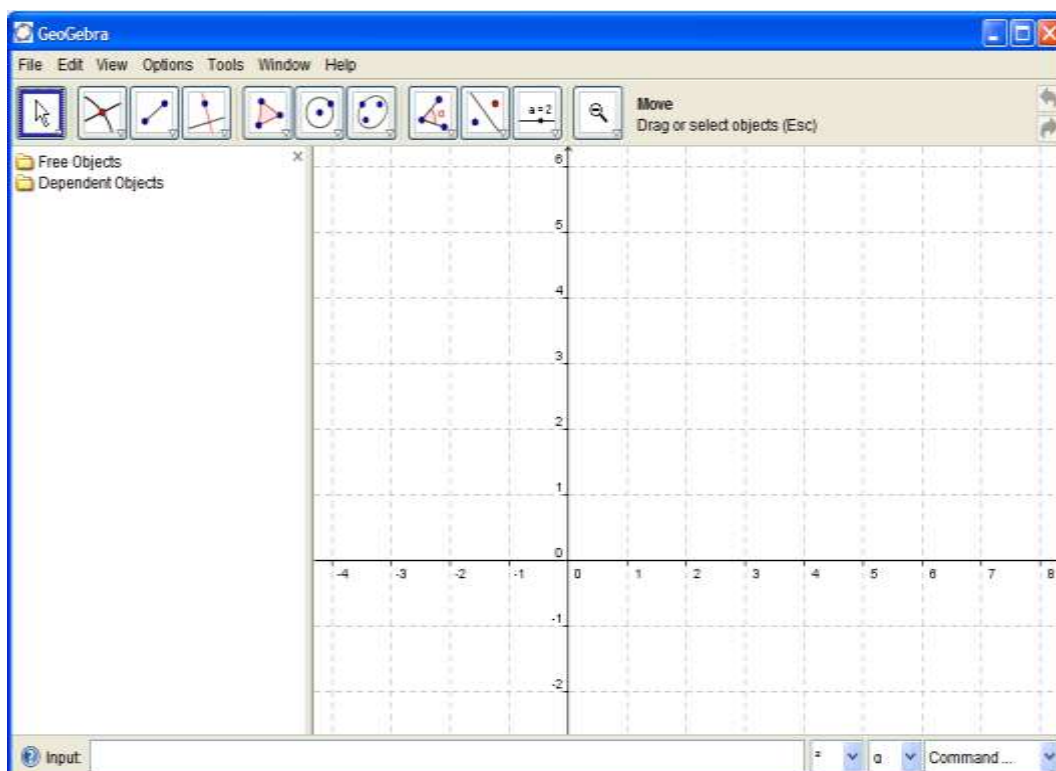
- b. *Geogebra* dapat mendukung siswa dalam mengerjakan dan mengelola proyek matematis, menyajikan berbagai representasi matematis, dan mendukung proses penemuan terbimbing
- c. Siswa dapat menginternalisasi kreasi atau konstruksi mereka sendiri melalui adaptasi *interface* (seperti ukuran huruf, bahasa, kualitas grafik, warna, koordinat, ketebalan grafik, *style* tulisan, dan fitur-fitur lainnya)
- d. *GeoGebra* diciptakan untuk membantu siswa memperoleh pemahaman matematis yang baik. Siswa dapat memanipulasi variabel dengan mudah dengan melakukan tekan dan geser (*drag*) terhadap objek konstruksi dengan menggunakan menu "*slider*". Siswa dapat menghasilkan perubahan dengan menggunakan teknik memanipulasi objek secara bebas dan kemudian mereka dapat belajar bagaimana objek *dependen* akan berubah.
- e. Input aljabar memungkinkan siswa mengkonstruksi objek baru atau memodifikasi objek yang sudah ada dengan menu edit. Sementara itu, file lembar kerja dapat dengan mudah di-*publish* di *website*

Menurut Hohenwarter & Fuchs (2004), *GeoGebra* sangat bermanfaat sebagai media pembelajaran matematika dengan beragam aktivitas sebagai berikut.

- a. Sebagai media demonstrasi dan visualisasi
 Dalam hal ini, dalam pembelajaran yang bersifat tradisional, guru memanfaatkan *GeoGebra* untuk mendemonstrasikan dan memvisualisasikan konsep-konsep matematika tertentu.
- b. Sebagai alat bantu konstruksi
 Dalam hal ini *GeoGebra* digunakan untuk memvisualisasikan konstruksi konsep matematika tertentu, misalnya mengkonstruksi lingkaran dalam maupun lingkaran luar segitiga, atau garis singgung.
- c. Sebagai alat bantu proses penemuan
 Dalam hal ini *GeoGebra* digunakan sebagai alat bantu bagi siswa untuk menemukan suatu konsep matematis, misalnya tempat kedudukan titik-titik atau karakteristik parabola.

Menu utama *GeoGebra* adalah: *File, Edit, View, Option, Tools, Windows*, dan *Help* untuk menggambar objek-objek geometri. Menu *File* digunakan untuk

membuat, membuka, menyimpan, dan mengekspor file, serta keluar program. Menu *Edit* digunakan untuk mengedit lukisan. Menu *View* digunakan untuk mengatur tampilan. Menu *Option* untuk mengatur berbagai fitur tampilan, seperti pengaturan ukuran huruf, pengaturan jenis (*style*) objek-objek geometri, dan sebagainya. Sedangkan menu *Help* menyediakan petunjuk teknis penggunaan program *GeoGebra*. Berbagai menu selengkapnya disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 1. Menu *GeoGebra*

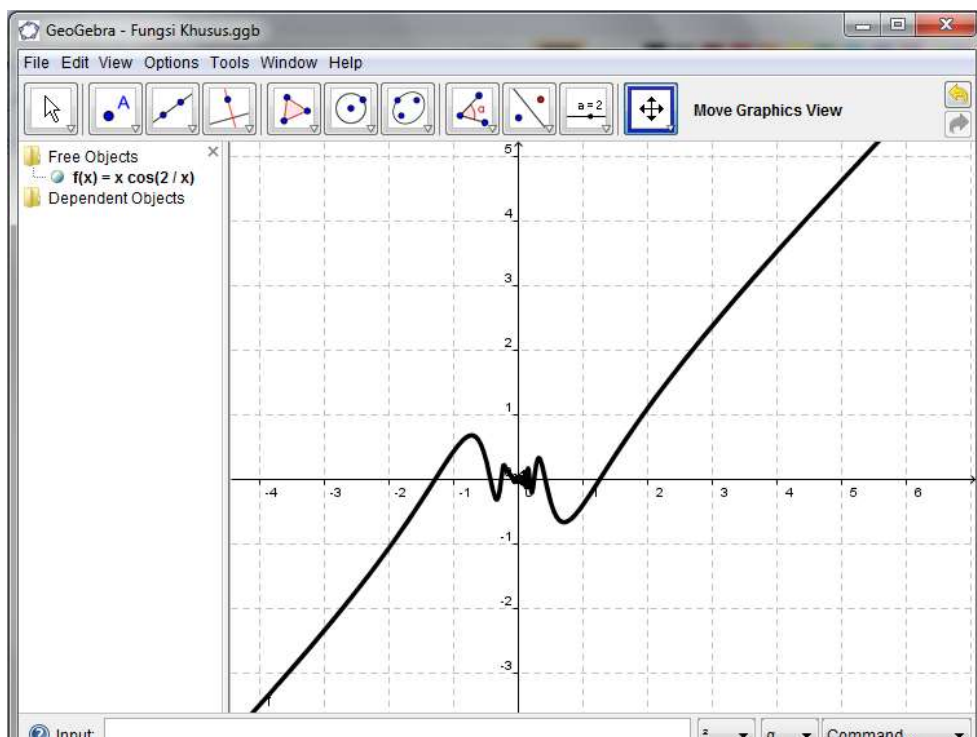
2. GeoGebra untuk Pembelajaran Kalkulus

GeoGebra dapat digunakan untuk membantu pembelajaran matematika mulai dari sekolah dasar sampai perguruan tinggi. Banyak guru dan peneliti dari berbagai penjuru dunia telah mengembangkan lembar kerja (*worksheet*) dan metode menggunakan *GeoGebra* di semua jenjang sekolah. Di jenjang sekolah menengah atas atau perguruan tinggi, *GeoGebra* sangat bermanfaat untuk mendukung pembelajaran konsep-konsep kalkulus. Beberapa contoh konstruksi *GeoGebra* untuk pembelajaran kalkulus dapat dilihat pada *GeoGebra* Wiki (www.geogebra.org/wiki) yang menyediakan berbagai koleksi lembar kerja interaktif untuk pembelajaran kalkulus.

Berikut disajikan beberapa contoh penggunaan *GeoGebra* dalam pembelajaran Kalkulus.

a. Visualisasi Suatu Fungsi Real

Banyak fungsi real dapat memunculkan kesulitan bagi siswa apabila menggunakan proses investigasi secara manual. Misalnya, fungsi $f, g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$ atau $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dapat memunculkan kesulitan bagi siswa ketika menginvestigasinya untuk nilai x di sekitar nol. *GeoGebra* dapat memberikan visualisasi yang sangat jelas untuk hal tersebut.



Gambar 2. Grafik Fungsi Real

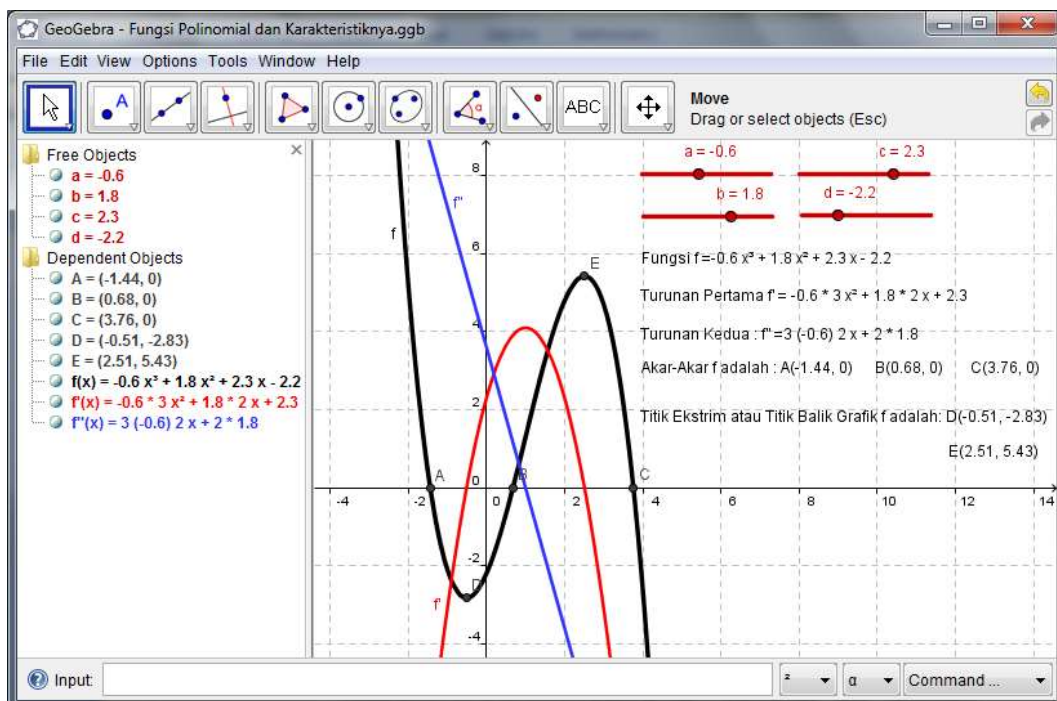
b. Turunan, Akar, dan Titik Ekstrim

Gambar 3 berikut memvisualisasikan polinomial $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, akar-akarnya, titik ekstrim atau titik balik, dan turunan pertama maupun kedua. Parameter fungsi polinomial $f(x)$ dapat dimodifikasi dengan menggunakan menu “slider” yang memungkinkan siswa melakukan hal-hal berikut.

- 1) Menginvestigasi pengaruh perubahan parameter terhadap fungsi awal (misalnya, parameter d akan mengubah atau memindah grafik fungsi ke “atas” dan ke “bawah” tanpa mengubah bentuknya

- 2) Mengeksplorasi keterkaitan antara fungsi awal dan turunannya (misalnya parameter d tidak mempengaruhi turunan; f memiliki titik ekstrim (titik balik), dan turunan pertama f' memiliki akar.

Analisis sistematis mengenai karakteristik fungsi polinomial dan turunannya dapat membantu siswa memiliki pemahaman yang lebih baik mengenai manipulasi aljabar dari fungsi. *GeoGebra* juga memungkinkan siswa memvisualisasikan karakteristik jenis fungsi tertentu dan meningkatkan keterampilan siswa untuk menggambar grafik fungsi dan turunannya.



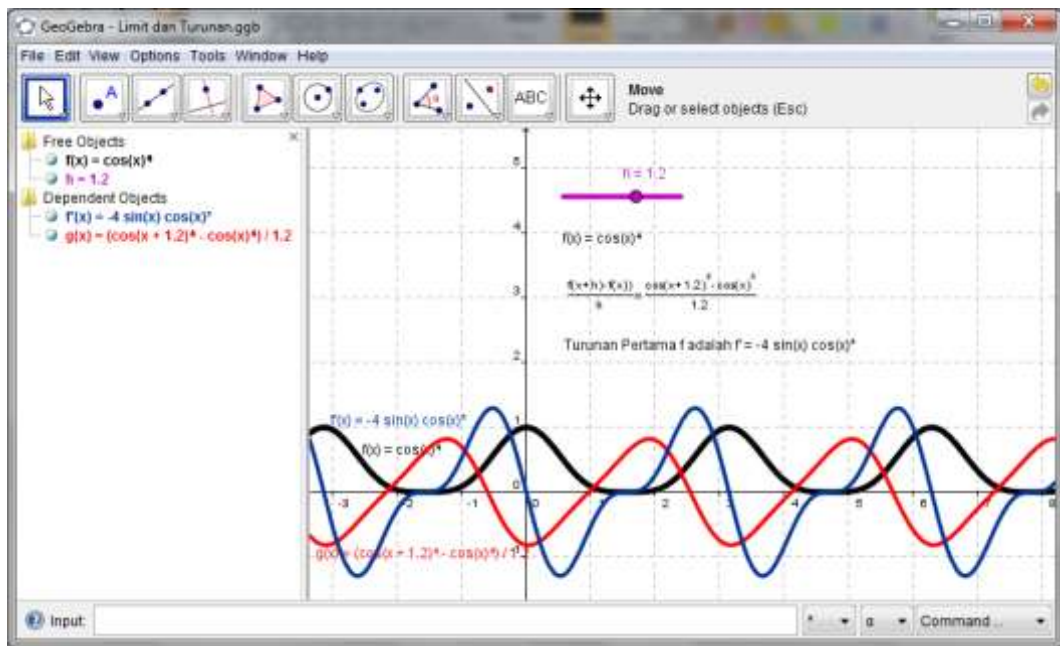
Gambar 3. Grafik Fungsi Polinomial dan Karakteristiknya

c. Limit dan Turunan

Gambar 4 menunjukkan visualisasi grafik fungsi $f(x) = \cos^4 x$, turunan pertamanya, yaitu $f'(x) = -4 \sin x \cdot \cos^3 x$, dan $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Dengan menggunakan slider untuk h dapat membantu siswa melihat dan memahami hubungan sebagai berikut.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

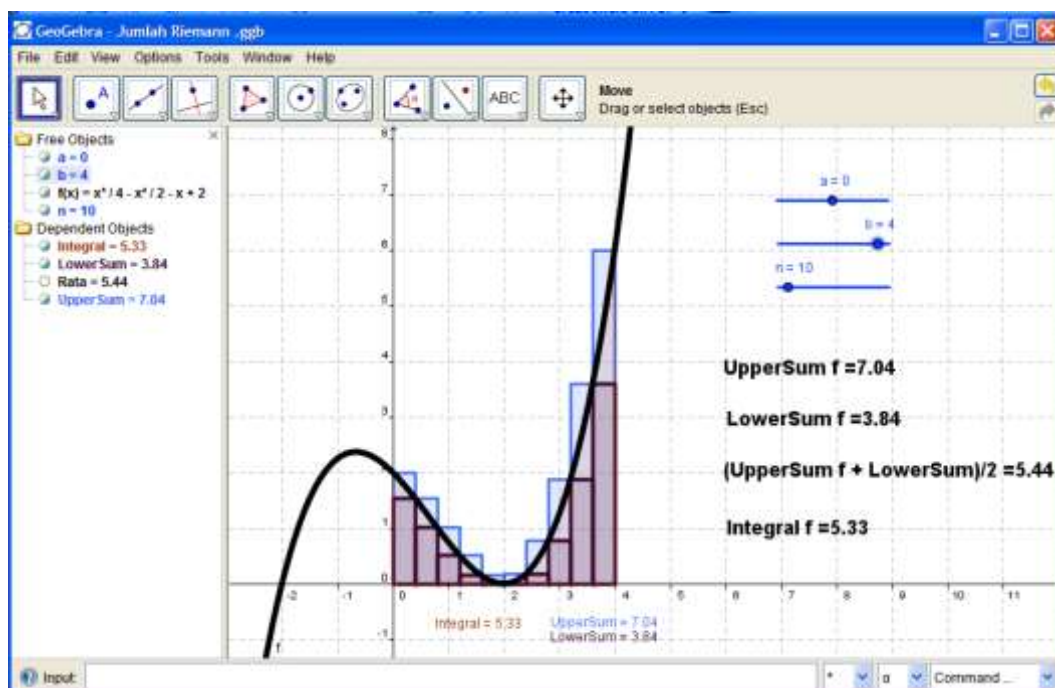
Proses konstruksi tersebut akan membantu siswa memahami secara mendasar konsep turunan dan keterkaitannya dengan konsep limit.



Gambar 4. Limit dan Turunan

d. Pengenalan Konsep Integral

GeoGebra dapat digunakan untuk mengenalkan konsep integral. Siswa diminta untuk membuat grafik dari fungsi tertentu, misalnya $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} - x + 2$. Siswa dapat diminta untuk menentukan *upper-sum* dan *lower-sum* dari fungsi tersebut dengan partisi atau banyaknya persegi panjang sebanyak n , dengan n adalah parameter yang belum tertentu. Dengan *GeoGebra*, dapat ditentukan nilai integral dari fungsi tersebut dengan batas tertentu. Dengan fasilitas *slider* untuk mengubah nilai n , akan tampak bahwa nilai integral tersebut akan mendekati rata-rata *UpperSum* dan *Lower-Sum* pada grafik tersebut. Dengan cara demikian, siswa akan memperoleh pemahaman yang baik mengenai konsep integral.



Gambar 5. Ilustrasi Pengenalan Konsep Integral

Respon siswa terhadap penggunaan GeoGebra dalam pembelajaran kalkulus diungkap oleh Hohenwarter *et al* (2008). Berikut ini adalah beberapa komentar siswa tersebut.

“Penggunaan GeoGebra sangat membantu untuk melihat apa yang berubah ketika mengubah sesuatu yang lain”

“Jika kamu mengubah atau memindah posisi titik B terhadap titik A, kamu akan menyadari bahwa garis potong terhadap kurva akan berubah menjadi garis singgung pada kurva tersebut. Dengan menggambar pada kertas saya tidak pernah mampu memvisualisasikan seperti ini”

“Dengan Menggunakan GeoGebra kamu dapat melakukan eksperimen dan mencoba berbagai hal dan menemukan solusi sendiri dari suatu masalah”

Berbagai respon tersebut menunjukkan bahwa penggunaan *GeoGebra* tersebut menjadikan pembelajaran kalkulus lebih dinamis dan bermakna.

C. Penutup

Dengan menggunakan *GeoGebra*, siswa dapat “melihat” konsep abstrak. Siswa dapat membuat hubungan dan menemukan konsep-konsep matematis. Kemampuan untuk mengakses solusi siswa secara elektronik berpotensi dapat meningkatkan minat siswa terhadap pembelajaran matematika dan meningkatkan

kemampuan kognitif siswa. Demikianlah, penggunaan GeoGebra dalam pembelajaran matematika dapat memberikan berbagai manfaat dan berpotensi untuk menjadikan pembelajaran matematika lebih dinamis dan bermakna.

D. Daftar Pustaka

Dikovic, Ljubica. (2009). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. Tersedia: <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/csis/12/060209.pdf> [12 April 2012]

Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2004). *Combination of Dynamic Geometry, Algebra, and Calculus in the Software System Geogebra*. Tersedia: www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf. [16 April 2012].

Hohenwarter, M., et al. (2008). *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra*. Tersedia; <http://www.publications.uni.lu/record/2718/files/ICME11-TSG16.pdf>. [15 April 2012]