BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar adalah suatu himpunan yang di dalamnya didefinisikan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Gelanggang (*Ring*) merupakan suatu struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner yang disebut penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi aksioma-aksioma : terhadap operasi penjumlahan bersifat komutatif, asosiatif, terdapat elemen nol , setiap elemen mempunyai invers jumlah, sedangkan terhadap operasi perkalian bersifat asosiatif serta memenuhi sifat distributif kanan maupun kiri. Gelanggang dimana terhadap operasi pergandaan bersifat komutatif disebut gelanggang komutatif. Apabila gelanggang tersebut memuat elemen satuan, maka disebut gelanggang dengan elemen satuan. Gelanggang komutatif yang tidak memuat pembagi nol sejati disebut daerah integral (*Integral Domain*). Daerah integral yang memuat elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers disebut lapangan (*Field*). Sebagai contoh adalah bilangan rasional, bilangan real dan bilangan kompleks adalah yang termasuk dalam struktur lapangan terhadap operasi penjumalahan dan perkalian biasa..

Ruang vektor V atas lapangan F adalah suatu grup abelian terhadap operasi jumlah sedemikian sehingga untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ dan untuk setiap $u, v \in V$ terdapat suatu elemen $\alpha v \in V$: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, $\alpha(\beta v) = (\alpha \beta)v$, $1v = v$. Lapangan K dan F, dengan $K \supset F$, lapangan K disebut lapangan perluasan (*Extention Field*) dari F dan F disebut lapangan bagian (*subfield*) dari K. Dengan demikian, operasi yang dikenakan pada F sama dengan operasi pada K. Selanjutnya K disebut perluasan berhingga (*finite extention*) dari F jika K dipandang sebagai ruang vektor atas F, dimensi K berhingga. Dalam tulisan ini, dimensi K atas F dinotasikan dengan $[K : F]$. Suatu $\alpha \in K$ disebut elemen aljabar jika terdapat polynomial tak nol $f(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Dalam penelitian ini akan diselidiki kaitan antara dua lapangan, yaitu antara lapangan perluasan dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan bagiannya beserta sifat – sifatnya terkait dengan perluasan aljabarnya.

B. Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang masalah tersebut, dapat diangkat beberapa masalah yang menarik sebagai berikut:

1. Jika diketahui L, K, F adalah suatu lapangan, dengan L dipandang sebagai ruang vektor atas K dan K dipandang sebagai ruang vektor atas F yang memenuhi hubungan $L \supset K \supset F$ dan $[L:K]$, $[K:F]$ berhingga:
   a. Apakah $[L:F]$ berhingga?
   b. Bagaimana hubungan ketiga dimensi dari ruang-ruang vektor tersebut?
2. Bagaimana sifat-sifat lapangan perluasan dipandang sebagai ruang vektor terkait dengan elemen-elemen aljabarnya ?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menyelidiki hubungan antara lapangan perluasan dengan lapangan bagiannya dipandang sebagai ruang vektor.
2. Menyelidiki hubungan antara dimensi dari lapangan perluasan dengan lapangan bagiannya dipandang sebagai ruang vektor.
3. Menyelidiki sifat-sifat lapangan perluasan dipandang sebagai ruang vektor terkait dengan elemen-elemen aljabarnya.

D. Manfaat Penelitian

Dari hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat:

1. Memberi wawasan baik bagi penulis maupun bagi pembaca dalam hal penelitian bidang Aljabar khususnya struktur aljabar
2. Memberi inspirasi bagi peneliti lain untuk mengembangkan hasil penelitian ini, terutama penelitian ilmu murni bidang Aljabar.

E. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan studi literatur. Sesuai dengan jenis penelitian ini, maka ditampuh langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dipelajari suatu struktur aljabar, yaitu: gelanggang, lapangan, dan ruang vektor.
2. Terkait dengan ruang vektor, dipelajari tentang basis , dimensi dan sifat-sifatnya.
3. Dipelajari tentang struktur lapangan perluasan, lapangan bagiannya dan pembentukan ruang vektor dari suatu lapangan perluasan atas lapangan bagiannya.
4. Menyelidiki hubungan antara dimensi ruang vektor dari lapangan perluasan dengan ruang vektor bagiannya.
5. Menyelidiki sifat-sifat lapangan perluasan.

BAB II

KAJIAN TEORI

Beberapa pengertian / definisi suatu struktur aljabar berikut sangat diperlukan dalam penelitian ini.

A Gelanggang (*Ring*)

Dalam hal ini perlu diberikan definisi gelanggang (***ring***) sebagai berikut :

Definisi 2.1. (Adkins : p. 49) *Gelanggang* $(R,+,.)$ *adalah suatu himpunan* R *bersama dengan dua operasi biner* $+ : RxR \rightarrow R$ *(penjumlahan) dan* $. : RxR \rightarrow R$ *(pergandaan) yang memenuhi aksioma sebagai berikut:*

(a) $(R,+)$ *merupakan grup abelian*

(b) $a.(b.c) = (a.b).c$ *(asosiatif)*

(c) $a.(b + c) = a.b + a.c$ *dan* $(a + b).c = a.c + b.c$ *(distributif kanan dan kiri)*

Gelanggang R dikatakan komutatif, jika terhadap operasi pergandaannya bersifat komutatif, dan dikatakan mempunyai elemen satuan jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $a.1=1.a=a$. Suatu elemen $a \in R$ dikatakan mempunyai invers $b \in R$ jika berlaku $a.b=b.a=1$. Suatu gelanggang disebut lapangan (***field***) jika komutatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.

Berikut diberikan definisi mengenai invers dari suatu elemen gelanggang dengan elemen satuan.

Definisi 2.2 (Adkins: p. 49). *Andaikan R adalah gelanggang dengan elemen satuan. Elemen* $a \in R$ *dikatakan mempunyai invers apabila terdapat* $a^{-1} \in R$ *sedemikian sehingga berlaku* $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

Selanjutnya definisi berikut mengenai gelanggang dengan sifat khusus, yang disebut dengan lapangan :

Definisi 2.3. (Herstein : p. 127) *Gelanggang R disebut lapangan apabila R adalah gelanggang komutatif, dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.*

B. Ruang Vektor

Dalam penelitian ini perlu didukung pengertian / definisi ruang vektor dan istilah – istilah yang terkait dengannya.

Definisi 2.4. (Anton : p. 137) . *Diberikan V adalah suatu himpunan dan F adalah suatu lapangan. Terhadap V didefinisikan suatu operasi penjumlahan dan didefinisikan pergandaan skalar F. Himpunan V dikatakan ruang vektor atas F jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut*:

(1) $(\forall u,v \in V)\; u + v \in V$

(2) $(\forall u,v \in V)\; u + v = v + u$

(3) $(\forall u,v,w \in V)\; u + (v + w) = (u + v) + w$

(4) $(\exists 0 \in V)(\forall v \in V)\; 0 + v = v + 0 = v$

(5) $(\forall v \in V)(\exists (-v) \in V)\; v + (-v) = (-v) + v = 0$

(6) $(\forall \alpha \in F)(\forall v \in V)\; \alpha v \in V$

(7) $(\forall \alpha \in F)(\forall u, v \in V)\ \alpha(u+v) = \alpha v + \alpha u$

(8) $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall v \in V)(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$

(9) $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall v \in V)\ \alpha(\beta v) = (\alpha \beta) v$

(10) $(\forall v \in V)\ 1.v = v$

Sebagai contoh ruang vektor : R^3, R^4, $R^n, M_{n\times n}(R)$ yang masing-masing merupakan ruang vektor atas bilangan real R, dan R sendiri dapat dipandang sebagai ruang vektor atas dirinya sendiri.

Selanjutnya didefinisikan sub ruang vektor sebagai berikut:

Definisi 2.5. (Anton: p.142). *Himpunan W yang merupakan himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V dikatakan sub ruang vektor jika W terhadap operasi yang sama dengan V membentuk ruang vektor*

Dalam hal kaitan antara vektor yang satu dengan vektor yang lain, dikenalkan suatu istilah kombinasi linear sebagai berikut:

Definisi 2.6. (Anton : p. 145). *Suatu vektor w dikatakan kombinasi linear dari vektor – vektor* $v_1, v_2, ..., v_r$ *jika w dapat dinyatakan dalam bentuk :* $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$ *untuk suatu skalar* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$.

Definisi berikut menjelaskan suatu konsep dimana semua vektor dalam ruang vektor *V* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari suatu himpunan bagian dari ruang vektor *V*:

Definisi 2.7. (Anton : p. 146). *Andaikan* $v_1, v_2, ..., v_r$ *adalah vektor – vektor dalam ruang vektor V. Himpunan* $v_1, v_2, ..., v_r$ *dikatakan merentang ruang vektor V apabila setiap vektor dalam V daat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari* $v_1, v_2, ..., v_r$.

Sementara itu, definisi berikut menjelaskan tentang konsep dimana suatu himpunan vektor bebas linear ataukah bergantung linear:

Definisi 2.8. (Anton p.151). *Andaikan* $v_1, v_2, ..., v_r$ *adalah vektor – vektor dalam ruang vektor V. Himpunan* $v_1, v_2, ..., v_r$ *dikatakan bebas linear jika persamaan vektor* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r = 0$ *hanya mempunyai tepat satu penyelesaian, yaitu:* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$. *Jika tidak demikian, maka himpunan tersebut dikatakan bergantung linear*.

Suatu himpunan yang bebas linear sekaligus merentang ruang vektornya disebut sebagai basis dari ruang vektor tersebut. Dimensi dari suatu ruang vektor adalah banyaknya vektor yang membentuk basis. Selanjutnya diberikan sifat-sifat basis dan dimensi dari suatu ruang vektor:

Teorema 2.1. (Fraleigh:376)*Pada suatu ruang vektor berdimensi hingga, setiap himpunan berhingga vektor yang merentang ruang vektor tersebut memuat basis*.

Akibat berikut merupakan akibat dari Teorema 2.1 tersebut.

Akibat 2.1. (Fraleigh: 377) *Suatu ruang vektor berdimensi hingga mempunyai basis berhingga.*

Teorema berikut menjamin adanya perluasan suatu himpunan bebas linear dari suatu ruang vektor agar membentuk basis untuk ruang vector tersebut:

Teorema 2.2. (Fraleigh : 377) *Misalkan* $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *himpunan berhingga vektor-vektor yang bebas linear d ari suatu ruang vektor berdimensi hingga* V *atas lapangan* F*, maka* S *dapat diperluasn menjadi basis untuk* V.

C. Lapangan Perluasan (*Extention Field*)

Dalam pembicaraan suatu struktur aljabar, selalu dibicarakan himpunan bagian yang membentuk struktur tersebut. Demikian halnya dengan struktur lapangan. Suatu himpunan bagian dari suatu lapangan yang membentuk lapangan terhadap operasi yang sama disebut lapangan bagian (*subfield*). Berikut diberikan suatu definisi suatu lapangan perluasan

Definisi 2.9. (Fraleigh : 362) *Suatu lapangan* E *disebut lapangan perluasan dari lapangan* F *jika* F *adalah lapangan bagian dari* E *atau dinotasikan dengan* $F \leq E$.

Berikut diberikan Teorema yang menjamin adanya suatu lapangan perluasan dari suatu lapangan F :

Teorema 2.3. (Fraleigh:362) *Misalkan* F *adalah suatu lapangan dan* $f(x) \in F[x]$ *adalah suatu polinomial tak konstan, maka terdapat suatu lapangan perluasan* E *dari lapangan* F *dan suatu* $\alpha \in E$ *sedemikian sehingga* $f(\alpha) = 0$.

Selanjutnya diberikan suatu definisi suatu elemen $\alpha \in E$ yang memenuhi sifat seperti dalam Teorema 2.3. di atas:

Definisi 2.10. (Fraleigh : 364 **)** *Suatu elemen* $\alpha \in E$*, dengan* E *suatu lapangan perluasan dari lapangan* F *disebur aljabar atas* F *jika* $f(\alpha) = 0$ *untuk sutu polinomial tak nol* $f(x) \in F[x]$.

Notasi $F(\alpha)$ menotasikan lapangan terkeail yang memuat F dan α. Selanjutnya, teorema berikut menjelaskan hubungan tentang dertajat polinomial $f(x)$ pada Definisi 2.10. ($\deg(\alpha, F)$) dengan dimensi $F(\alpha)$ atas F.

Teorema 2.4 (Fraleigh : 379) Misalkan E lapangan perluasan dari F dan $\alpha \in E$ *aljabar atas* F. Jika $\deg(\alpha, F) = n$, maka dimensi $F(\alpha)$ atas F adalah n ($[F(\alpha) : F] = n$),dengan basis $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}\}$. Setiap $\beta \in F(\alpha)$ adalah suatu aljabar atas F dan $\deg(\alpha, F)$ lebih besar atau sama dengan $\deg(\beta, F)$

Definisi berikut mengkarakterisasi suatu lapangan perluasan yang setiap elemennya adalah suatu aljabar.

Definisi 2.11. (Fraleigh : 388). *Suatu lapangan perluasan* E *dari lapangan* F *disebut perluasan aljabar dari* F *jika setiap elemen aljabar atas* F.

Berikut diberikan definisi tentang dimensi perluasan berhingga, jika dipandang sebagai ruang vektor:

Definisi 2.12. (Fraleigh : 388). *Jika suatu lapangan perluasan* E *dari lapangan* F *dipandang sebagai ruang vector atas* F *berdimensi hingga,* n*, maka* E *disebut perluasan berhingga berderajat* n

BAB III
PEMBAHASAN

Suatu lapangan perluasan dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan bagiannya. Teorema berikut menjamin bahwa suatu lapangan perluasan yang dipandang sebagai suatu ruang vektor yang berdimensi hingga selalu merupakan perluasan aljabar

Teorema 3.1. J*ika* E *adalah suatu lapangan perluasan berhingga atas* F *, maka* E *adalah perluasan aljabar dari* F

Bukti:

Dalam pembuktian ini cukup dibuktikan bahwa setiap elemen di dalam E merupakan aljabar atas F.

Dalam hal ini E dipandang sebagai suatu ruang vektor yang berdimensi hingga. Misal E berdimensi n, atau $[E:F]=n$. Bentuk suatu himpunan $\{1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^n\}\subset E$, maka himpunan tersebut bergantung linear. Sehingga:

$$a_0+a_1\alpha+...+a_n\alpha^n=0$$

Dipenuhi untuk suatu $a_i\neq 0$. Dengan demikian $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ bukan polynomial nol di $F[x]$, akan tetapi $f(\alpha)=0$. Dapat disimpulkan bahwa α adalah aljabar atas F. Karena berlaku untuk sembarang $\alpha\in E$, maka terbukti bahwa setiap elemen E merupakan aljabar atas F.

■

Teorema berikut menjamin , jika $K\leq E\leq F$ dan masing-masing adalah ruang vector berhingga maka $K\leq F$ juga berhingga dan dimensinya merupakan hasil kali dari dimensi lapangan bagiannya.

Teorema 3.2. *Jika* E *lapangan perluasan berhingga dari* F *dan* K *merupakan lapangan perluasan berhingga dari* E*, maka* K *merupakan lapangan perluasan dari* F *dengan dimensinya adalah*: $[K:F]=[K:E][E:F]$

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa K adalah suatu lapangan perluasan berhingga atas lapangan F sama halnya dengan membuktikan bahwa K adalah suatu ruang vektor atas F, yang mempunyai basis berhingga yang merentang K dan bebas linier. Misalkan $\{v_i, i=1,2,...,n\}$ adalah suatu basis dari E atas F dan $\{w_j, j=1,2,...,m\}$ adalah suatu basis dari K atas E. Misalkan pula k adalah sebarang anggota dari K. Karena w_j elemen basis dari K atas E, maka $k=b_1w_1+b_2w_2+\cdots+b_mw_m=\sum_{j=1}^{m}b_jw_j$, dengan $b_j\in E$. Karena v_i membangun suatu basis untuk E atas F, maka $b_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$, dengan $a_{ij} \in F$. Maka $k = \sum_{j=1}^{m} b_j w_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=a}^{n} a_{ij}v_i\right)w_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(v_i w_j)$. Terlihat bahwa vektor-vektor $v_i w_j$, dengan $i = 1,2,\ldots n$ & $j = 1,2,\ldots,m$ merentang ruang vektor K atas F. Di lain pihak, misalkan $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(v_i w_j) = 0$, dengan $c_{ij} \in F$, maka $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}v_i\right)w_j = 0$ dengan $\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}v_i\right) \in E$. Karena w_j adalah suatu basis dari K atas E, maka anggota w_j bersifat bebas linier. Ini berarti $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}v_i = 0$ untuk semua *j*. Tetapi karena v_i merupakan suatu basis untuk E atas F, maka v_i juga bersifat bebas linier, sehingga $c_{ij} = 0$ untuk semua *i* dan *j*. Ini berarti vektor-vektor $v_i w_j$ bersifat bebas linier. Dari bukti diatas jelas bahwa vektor-vektor $v_i w_j$, dengan $i = 1,2,\ldots n$ & $j = 1,2,\ldots,m$ adalah suatu basis berhingga untuk K atas F.

Menurut Definisi 3.2 dan Definisi 3.3, karena $\{w_j, j = 1,2,..., m\}$ adalah suatu basis dari K atas E dan $\{v_i, i = 1,2,..., n\}$ adalah suatu basis dari E atas F maka $[K : E] = m$ dan $[E : F] = n$. Dilain pihak, dari bukti di atas diperoleh bahwa vektor-vektor $v_i w_j$, dengan $i = 1,2,\ldots n$ & $j = 1,2,\ldots,m$ adalah suatu basis berhingga untuk K atas F. Sehingga $[K : F] = nm = mn = [K : E][E : F]$.

■

Akibat dari teorema di atas diberikan sebagai berikut, sebagai bentuk generalisasi dari teorema sebelumnya:

Akibat 3.1. *Jika F_i adalah suatu lapangan dengan $i = 1,2,...,r$ dan F_{i+1} adalah lapangan perluasan dari F_i, maka F_r adalah lapangan perluasan dari F_1 dan* $[F_r : F_1] = [F_r : F_{r-1}][F_{r-1} : F_{r-2}]....[F_2 : F_1]$

Bukti:

Untuk membuktikan akibat di atas digunakan induksi matematika:

$n = 3$

Diketahui $F_1 \le F_2 \le F_3$, maka menurut Teorema 3.2 diperoleh F_3 adalah lapangan perluasan dari F_1 dan berlaku $[F_3 : F_1] = [F_3 : F_2][F_2 : F_1]$.

$n = r - 1$

Dalam hal ini berarti $F_1 \le F_2 \le ... \le F_{r-1}$ dan F_{r-1} adalah lapangan perluasan dari F_1 dan berlaku $[F_{r-1} : F_1] = [F_{r-1} : F_{r-2}][F_{r-2} : F_{r-3}]....[F_2 : F_1]$ diasumsikan benar.

$n = r$

Dalam hal ini berlaku $F_1 \le F_{r-1} \le F_r$, maka menurut Teorema 3.2 diperoleh F_r adalah lapangan perluasan dari F_1 dan berlaku $[F_r : F_1] = [F_r : F_{r-1}][F_{r-1} : F_1]$. Diketahui dari asumsi berlaku $[F_{r-1} : F_1] = [F_{r-1} : F_{r-2}][F_{r-2} : F_{r-3}]...[F_2 : F_1]$. Sehingga diperoleh:

$$[F_r : F_1] = [F_r : F_{r-1}][F_{r-1} : F_{r-2}][F_{r-2} : F_{r-3}]...[F_2 : F_1]$$

■

Akibat 3.2. *Jika E lapangan perluasan dari F, $\alpha \in E$ suatu aljabar atas F dan $\beta \in F(\alpha)$, maka* $\deg(\beta, F)$ *membagi* $\deg(\alpha, F)$.

Bukti:

Menurut Teorema 2.4, maka $\deg(\alpha, F)$ lebih besar dari $\deg(\beta, F)$ atau $[F(\alpha) : F]$ lebih besar dari $[F(\beta) : F]$. Jelas bahwa dari kondisi ini maka $F \le F(\beta) \le F(\alpha)$, sehingga menurut Teorema 3.2, berlaku : $[F(\alpha) : F] = [F(\alpha) : F(\beta)][F(\beta) : F]$. Dengan demikian $[F(\beta) : F]$ membagi $[F(\beta) : F]$, atau $\deg(\beta, F)$ membagi $\deg(\alpha, F)$.

BAB IV
KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh beberapa kesimpulan yaitu :

1. Jika E lapangan perluasan berhingga dari F dan K merupakan lapangan perluasan berhingga dari E, maka K merupakan lapangan perluasan dari F dengan dimensinya adalah: $[K:F]=[K:E][E:F]$.
2. Jika F_i adalah suatu lapangan dengan $i=1,2,...,r$ dan F_{i+1} adalah lapangan perluasan dari F_i, maka F_r adalah lapangan perluasan dari F_1 dan $[F_r:F_1]=[F_r:F_{r-1}][F_{r-1}:F_{r-2}]...[F_2:F_1]$.
3. Jika E lapangan perluasan dari F, $\alpha \in E$ suatu aljabar atas F dan $\beta \in F(\alpha)$, maka $\deg(\beta, F)$ membagi $\deg(\alpha, F)$.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, Weintraub. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Spinger Verlag, New York.

Anton, H; Rorres, C. 1991. *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. John Wiley & Sons Inc, New York.

Fraleigh, J.B. 1989. *A first Course in Abstract Algebra*, 4th Edition. Addison Wesley. New York.

Herstein, I.N. 1996. *Abstact Algebra, Third Edition*. Prentice Hall, Inc. New Jersey.

Raisinghania, Agarwal. 1980. *Modern Algebra*. S. Chand & Company LTD. Ram Nagar, New Delhi