

Fleksibilitas Matematik dalam Pendidikan Matematika Realistik  
Sugiman  
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

**Abstrak**

Fleksibilitas matematik adalah faktor utama dalam belajar matematika maupun dalam memecahkan masalah matematik. Fleksibilas matematik meliputi fleksibilitas koneksi, representasi, konsep, dan strategi. Keempat fleksibilitas tersebut dapat ditumbuhkembangkan melalui implementasi Pendidikan Matematika Realistik.

Kata Kunci: Fleksibilitas, Pendidikan Matematika Realistik

**A. Fleksibilitas**

Salah satu tujuan adanya diajarkannya matematika di sekolah sebagaimana yang tertulis pada Kurikulum 2006 adalah agar siswa memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep, dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Keluwesan atau fleksibilitas merupakan kemampuan yang perlu diajarkan kepada siswa. Bentuk-bentuk fleksibilitas dikelompokkan dalam fleksibilitas koneksi, fleksibilitas representasi, fleksibilitas konsep, dan fleksibilitas strategi.

Agar siswa mencapai hasil belajar matematika secara maksimal, pembelajaran tidak cukup pada mengajarkan prosedur-prosedur rutin namun diperlukan siswa juga perlu dilatih agar fleksibel. Fleksibel dalam pengetahuan dimaknai sebagai memiliki pengetahuan tentang multi prosedur solusi dan memiliki kemampuan memilih prosedur yang tepat untuk menyelesaikan suatu soal (Star, 2006). Sebelumnya Star (2001) menemukan bahwa, jika dibandingkan pembelajaran langsung, metode penemuan lebih mampu meningkatkan fleksibilitas

siswa dalam menyelesaikan soal aljabar dengan menggunakan berbagai alternatif urutan prosedur (*alternative ordering*).

Fleksibilitas koneksi merupakan modal utama bagi siswa dalam belajar matematika dan dalam menghadapi problem-problem matematika. Koneksi dalam matematika sebagai implikasi dari matematika merupakan kesatuan yang utuh. Dengan kemampuan fleksibilitas koneksi matematik, siswa lebih mudah dalam memilih dan mengingat berbagai konsep dan prosedur yang utama sehingga tidak terbebani dengan hafalan-hafalan konsep atau prosedur matematik yang tidak perlu (NCTM, 2000). Macam-macam koneksi menurut Coxford (1995:3-4) meliputi koneksi antar pengetahuan konseptual dan prosedural, koneksi antar topik dalam matematika, koneksi antara matematika dengan bidang lain, koneksi antara dunia riil dengan matematika, dan koneksi antar representasi matematik.

Fleksibilitas representasi berkaitan dengan kemampuan dalam menyajikan suatu konsep atau prosedur matematika dalam berbagai bentuk. Sebagai contoh dalam menentukan ruang sampel kejadian yang berkaitan dengan problem yang berkonteks warung gudeg, tampak pada Gambar 1, siswa menggunakan berbagai representasi.

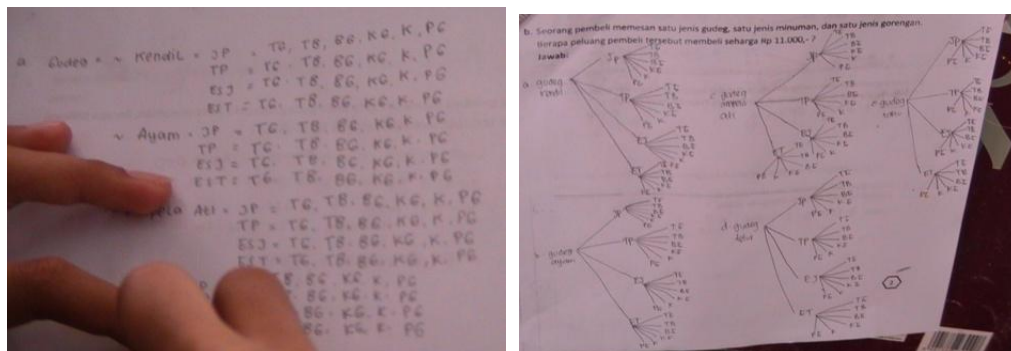
**Problem 1. Menu Makanan.** Warung gudeg Yu Marto menyediakan aneka pilihan gudeg dan minuman seperti tampak di samping.

a. Kalian akan memesan satu jenis gudeg beserta satu jenis minuman. Bagaimana cara menentukan semua pilihan yang mungkin kalian pesan? Sebutkan semua pilihan tersebut!

Menu	
<b>Makan</b>	
Gudeg Kendil	Rp. 9.000,-
Gudeg Ayam	Rp. 8.500,-
Gudeg Ampela Ati	Rp. 8.000,-
Gudeg Telur	Rp. 7.500,-
Gudeg Tahu	Rp. 6.500,-
<b>Minuman</b>	
Jeruk Panas	Rp. 1.500,-
Teh Panas	Rp. 1.000,-
Es Jeruk	Rp. 2.000,-
Es Teh	Rp. 1.500,-

Gambar 1. Problem yang Memunculkan Banyak Cara Penyelesaian

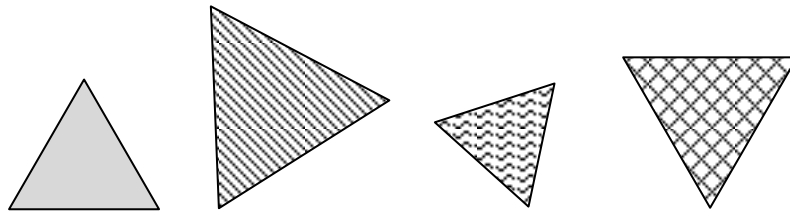
Multi representasi yang mungkin dibuat siswa tampak pada Gambar 2. Penyelesaian dengan cara mendaftar (gambar kiri) menggambarkan siswa menggunakan bentuk model-untuk situasi sedangkan cara diagram pohon (gambar kanan) menandakan siswa memulai bergerak menuju model-untuk matematika. Akhir dari penggunaan kedua representasi ini adalah ditemukannya bahwa ukuran ruang sampel dalam konteks tersebut dapat dihitung dengan rumus  $5 \times 4$ . Bilangan 5 menunjukkan banyaknya jenis gudeg dan bilangan 4 merupakan banyaknya jenis minuman.



Gambar 2. Fleksibilitas Representasi

Pada suatu kesempatan kolega penulis melontarkan isu tentang mungkin tidaknya didefinisikan segitiga sama sudut sebagai pengganti segitiga sama kaki. Kemunculnya nama segitiga sama sudut bisa muncul dari siswa bilamana pembelajaran di kelas menggunakan konstruktivisme. Para siswa di kelas diberikan berbagai model segitiga dari kertas karton dan diminta mengelompokkannya berdasarkan kesamaan sifat. Hasil pengelompokan dapat berupa kumpulan segitiga seperti tampak pada Gambar 3. Kesamaan sifat yang ditemukan siswa dapat berupa dua macam, yakni keempat segitiga tersebut masing-masing mempunyai panjang sisi yang sama atau besar sudut yang sama. Dengan demikian ada rasionalitas

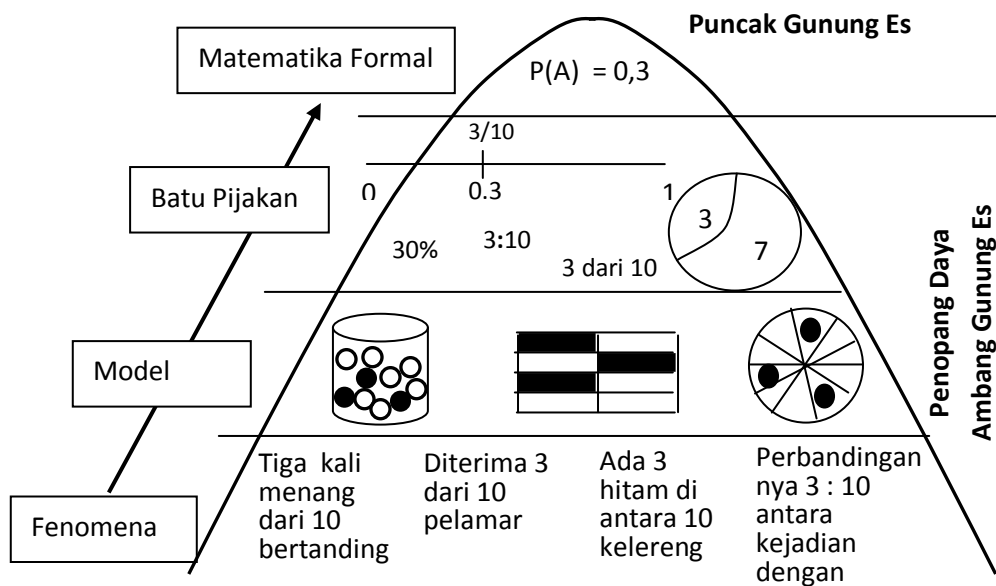
menggunakan segitiga sama sudut sebagai pengganti segitiga sama sisi; walaupun sampai sekarang belum ada yang menggunakan istilah segitiga sama sudut.



Gambar 3. Segitiga-Kegitiga yang Memiliki Kesamaan Sifat

### B. Fleksibilitas Strategi

Dasar pengembangan bahan ajar dalam Pendidikan Matematika Realistik mengacu pada perkembangan kognitif matematik siswa yang dimulai dari fenomena konteks riil, model-dari situasi, model-untuk matematika sebagai batu pijakan, dan matematika formal (Gravemeijer, 2000). Jenjang kognisi tersebut diilustrasikan memakai fenomena gunung es seperti tampak pada Gambar 4.



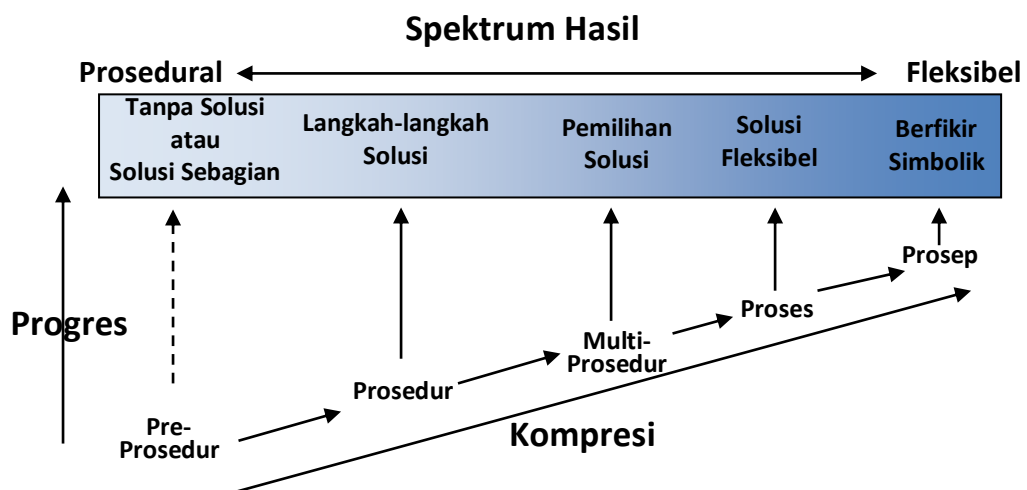
Gambar 4. Gunung Es Topik Peluang

Gambar 4 di atas mengilustrasikan adanya jenjang kognisi siswa terkait konsep peluang. Pada bagian awal, peluang terkait dengan berbagai fenomena kontekstual dan kemudian dengan menggunakan alat bantu manipulatif terlihat adanya representasi ikonik. Tahap berikutnya adalah representasi simbolik yang berada pada tataran batu pijakan dan matematika formal. Keragaman level kognitif ini berdampak pada tersedianya pilihan strategi dalam menempuh lintasan belajar (*trajectory learning*).

Adanya bervariasi lintasan belajar sangat berpengaruh terhadap strategi yang digunakan siswa ketika ia menyelesaikan suatu masalah. Siswa bisa menggunakan multi-strategi dalam menyelesaikan masalah matematika yang dihadapinya. Fleksibilitas pemecahan masalah ini didefinisikan sebagai pengetahuan tentang (a) multi strategi dan (b) pengetahuan tentang efisiensi relatif dari masing-masing strategi tersebut (Star, 2007). Multi-strategi tersebut dapat dibuat oleh siswa sendiri atau berdasarkan pengetahuan sebelumnya. Sebagai gambaran, dalam menemukan teorema yang baru, ahli matematika memanfaatkan berbagai strategi yang telah dipelajarainya secara lebih dominan daripada mereka membuat strategi yang baru.

Tall (2008) menggambarkan spektrum mulai dari sisi kiri yang bersifat prosedural ke arah sisi kanan yang bersifat fleksibel. Prosedural dianggap sebagai suatu langkah-langkah yang harus diikuti dalam menyelesaikan masalah. Seorang siswa yang hanya mempunyai pre-prosedur akan sangat bersifat prosedural sedangkan siswa yang mencapai tahap proses akan menjadi fleksibel. Pada Gambar 5 tampak adanya pengaruh kemampuan siswa dalam mencari, menggunakan, atau

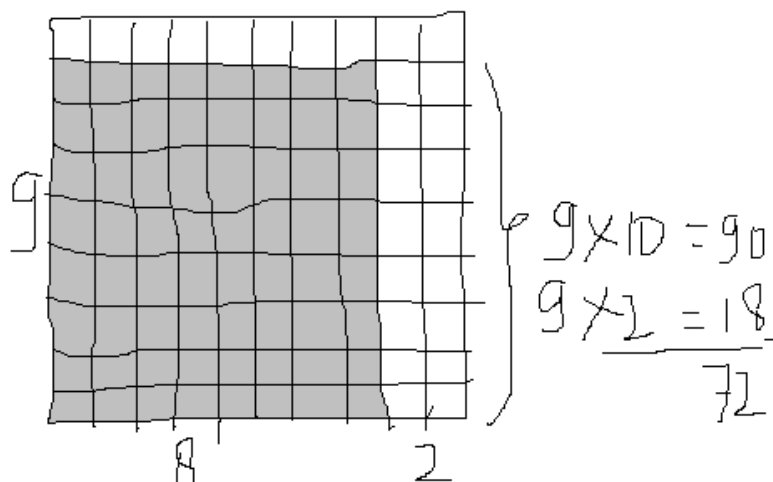
memilih prosedur terhadap tingkat fleksibilitasnya. Siswa yang memiliki pre-prosedur tidak akan memperoleh solusi atau hanya menemukan sebagian dari solusinya. Siswa dengan kemampuan ini merupakan siswa yang sangat prosedural dan belum memahami rasionalitas penggunaan prosedur tersebut. Siswa yang menguasai suatu prosedur akan menyelesaikan masalah sesuai dengan langkah-langkah dalam prosedur tersebut. Siswa yang memiliki pengetahuan bermacam-macam strategi mempunyai ruang untuk memilih prosedur yang paling efektif. Bermula dari multi-prosedur yang dimilikinya, siswa melakukan proses pemilihan prosedur atau melakukan hal yang lebih tinggi, misalnya melakukan pemaduan antar prosedur yang berakibat diperolehnya solusi yang jauh lebih fleksibel. Pada akhir aktivitas kompresi, siswa mencapai tahap prosep yang berakibat digunakannya simbol-simbol dan berfikirnya secara simbolik. Dalam tahap paling akhir ini, siswa memiliki fleksibilitas yang sangat besar dalam menyelesaikan masalah matematika.



Gambar 5. Spektrum Hasil pada Proses Kompresi (Tall, 2008)

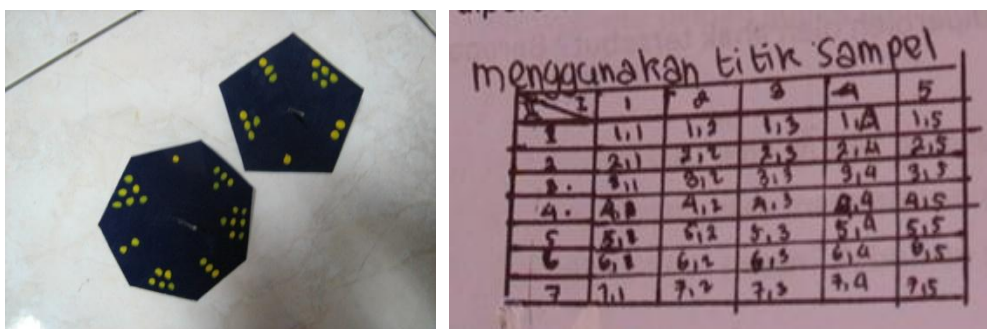
Lemahnya pengetahuan yang fleksibel berpengaruh pada rendahnya prestasi matematikanya; siswa tanpa pengetahuan yang fleksibel akan mengalami kesulitan

besar dalam menyelesaikan masalah yang lintas topik dan konteks serta dalam menggunakan beragam program *software* (Andresen, 2007). Fleksibilitas seringkali dideskripsikan sebagai kemampuan memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan penyelesaian masalah secara efisien. Strategi tersebut didefinisikan sebagai langkah-langkah dalam prosedur pemecahan masalah. Kunci utama pada fleksibilitas adalah dimilikinya pengetahuan tentang strategi multipel yang sangat bermanfaat dalam belajar matematika dan menyelesaikan masalah (Star dan Bethany, 2007). Siswa yang fleksibel mempunyai lebih dari satu cara untuk menyelesaikan masalah. Sebagai contoh, dalam menghitung perkalian  $9 \times 8$  siswa dapat menggunakan berbagai strategi, yakni dengan menghitung memakai sifat asosiatif, komutatif, dan distributif perkalian seperti halnya  $(10 \times 8) - 8$ ,  $(5 \times 8) + (4 \times 8)$ ,  $(9 \times 9) - 8$ , atau  $9 + (8 \times 8)$ . Bahkan siswa tersebut dapat menyelesaikannya dengan memakai representasi dalam bentuk gambar seperti tampak pada Gambar 6.



Gambar 6. Solusi Siswa Menggunakan Representasi Gambar

Fleksibilitas berkenaan dengan pengetahuan strategi yang efisien. Siswa yang fleksibel mengetahui strategi mana yang lebih efisien terkait dengan persoalan yang dihadapinya. Mereka mampu melakukan pemilihan strategi yang dimilikinya. Pengetahuan tentang strategi yang efisien sangat mendasar bagi siswa dalam memecahkan masalah dan membantu dalam belajar maupun dalam membangun strategi baru. Kemampuan memilih strategi yang paling efektif dipengaruhi oleh level kognitif dari individu yang bersangkutan. Bagi siswa tertentu lebih cocok jika memakai model-dari situasi (*model-of situation*) dan bagi siswa lainnya mungkin lebih cocok dengan menggunakan model-untuk matematika (*model-for mathematics*) atau bahkan dengan simbol-simbol formal. Sebagai contoh dalam mencari ukuran ruang sampel pada pemutaran dua gasing (bersisi tujuh dan lima), siswa dapat menggunakan berbagai cara, misalnya cara mendaftar, cara tabel, cara diagram pohon, dengan uraian kalimat, atau dengan rumus. Cara yang digunakan siswa pada Gambar 7 adalah dengan membuat tabel yang sudah mendekati model-untuk matematika.

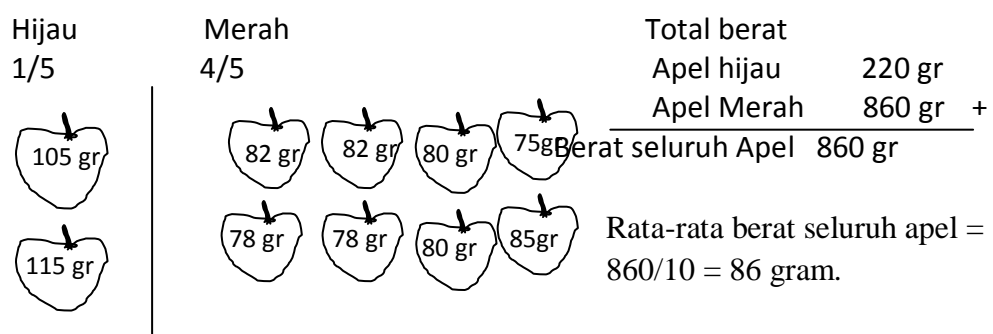


Gambar 7. Penggunaan Cara Tabel dalam Konteks Dua Gasing

Mengembangkan fleksibilitas siswa berkaitan menumbuhkan pengetahuan konseptual dan kemampuan pentransferan. Blote mengemukakan siswa yang mengembangkan kemampuan fleksibilitasnya dalam penyelesaian masalah



cenderung menggunakan atau mengadaptasi strategi-strategi yang telah ada ke dalam situasi baru dan sekaligus mereka meningkatkan pemahamannya tentang konsep yang berkaitan (Star dan Bethany, 2007). Sebagai contoh siswa menggunakan strategi khusus dalam menyelesaikan masalah seperti berikut. “Satu keranjang apel terdiri dari apel hijau dan apel merah. Seperlima diantaranya berupa apel hijau. Rata-rata berat apel hijau adalah 110 gram sedangkan rata-rata berat apel merah 80 gram. Berapakah rata-rata berat dari seluruh apel tersebut?” Salah satu strategi informal siswa dalam menyelesaikan adalah tampak pada Gambar 8.



Gambar 8. Strategi Informal

Strategi siswa yang dipakai akan digunakannya lagi pada saat menyelesaikan masalah atau ia akan memperbaikinya dengan strategi yang efisien dan lebih abstrak. Misalkan siswa diberikan masalah baru seperti ”Setiap siswa di kelas IX-B ditimbang berat badannya. Rata-rata berat badan siswa laki-laki adalah 46 kg dan rata-rata berat badan siswa perempuan adalah 38 kg. Jika di kelas tersebut 35% diantaranya adalah laki-laki, berapa rata-rata berat badan seluruh siswa di kelas tersebut?” Siswa menyelesaikan persoalan ini dengan cara yang sama atau cara yang lebih abstrak. Cara yang lebih abstrak tersebut misalnya dengan memisalkan jumlah semua siswa adalah 20, maka banyak siswa laki-laki ada 7 dan yang perempuan ada 13. Karena rata-rata berat badan laki-laki adalah 46

maka total berat anak laki-laki adalah  $7 \times 46 = 322$  sedangkan total berat perempuan adalah  $13 \times 38 = 494$ . Dengan demikian rata-rata berat badan siswa di kelas tersebut adalah  $(322 + 494) : 20 = 40,8$  kg. Cara lebih abstrak lagi yang digunakan siswa adalah dengan memisalkan banyaknya seluruh siswa adalah  $M$  dan dengan prosedur yang sama seperti sebelum di atas akan diperoleh hasil akhir rata-ratanya  $\{(35\%M \times 46) + (75\%M \times 38)\} : M = 40,8$  kg.

### C. Penutup

Fleksibilitas matematik merupakan kemampuan yang sangat diperlukan oleh siswa dalam belajar matematika. Fleksibilitas matematik terdiri atas fleksibilitas koneksi, representasi, kondep, dan strategi. Keempat fleksibilitas tersebut saling terkait dan saling memperkuat dalam setiap kali siswa melakukan kegiatan matematik (*doing mathematics*).

Fleksibilitas matematik akan sulit terbentuk apabila pembelajaran matematika di kelas hanya bersifat informatif dan dril soal-soal. Dalam pembelajaran seperti itu dinamika kognitif siswa tidak sebesar yang terjadi apabila pembelajaran matematika dengan menerapkan Pendidikan Matematika Realistik.

### D. Referensi

Andresen, Mette. 2007. *Introduction of a New Construct: The conceptual Tool "Flexibility"*. The Montana Mathematics Enthusiast. Vol 4 No. 2 p. 230-250.

Coxford, A.F. (1995). "The Case for Connections", dalam *Connecting Mathematics across the Curriculum*. Editor: House, P.A. dan Coxford, A.F. Reston, Virginia: NCTM.

Gravemeijer, K. (2000). *Developmental Research: Fostering a Dialectic Relation between Theory and Practice*. In Brochure of Freudhental Institute for the 9<sup>th</sup> International Congress on Mathematics Education (ICME9) in Japan, July 2000.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Tersedia di [www.nctm.org](http://www.nctm.org).

Star, J.R. 2001. *Re-conceptualizing Procedural Knowledge: Innovation and Flexibility in Equation Solving*. Michigan: University of Michigan.

Star, J.R. 2006. *Flexibility in the Use of Mathematical Procedure*. San Diego: American Educational Research Education.

Star, J.R. dan Bethany, R.J. 2007. *Flexibility in Problem Solving: The case of equation solving*. Journal: Learning an Instruction XX.

Tall, David. 2008. *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. Mathematics Education Research Journal. Vol. 20, NO. 2, p. 5-24.

---000---