

BAB I

PENDAHULUAN

A. Kompetensi yang diharapkan

Bab ini memberikan gambaran menyeluruh secara garis besar mengenai apa itu sistem dinamik

dan hal-hal apa saja yang terkait di dalamnya. Sehingga setelah menyelesaikan bab ini

mahasiswa diharapkan mampu :

1. Memahami gambaran secara garis besar hal-hal yang terkait dengan sistem dinamik
2. Menunjukkan ketunggalan solusi suatu persamaan diferensial orde satu
3. Menggambarkan trayektori dari persamaan diferensial autonomus pada bidang Cartesius.
4. Menentukan kestabilan dari titik kritis pada persamaan diferensial autonomus scalar.

B. Selang pandang tentang sistem dinamik

Sistem dinamik adalah suatu masalah yang sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan sebagai dari contohnya adalah masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations). Dengan berkembangnya komputer maka semakin pesat juga perkembangan dari sistem dinamik.

Topik sistem dinamik ini merupakan suatu topik lanjutan artinya untuk mempelajari sistem dinamik ini dengan baik seseorang memerlukan landasan pengetahuan sebelumnya yakni persamaan diferensial khususnya persamaan diferensial autonomus yaitu persamaan diferensial dimana variable bebasnya tidak muncul secara eksplisit dalam persamaan. Pada dasarnya sistem dinamik adalah mempelajari perubahan apa yang terjadi dengan suatu sistem atau keadaan yang memenuhi kondisi tertentu dengan seiring berubahnya waktu apakah sistem tersebut stabil (menuju ke keadaan tertentu) ataukah tidak stabil. Sebagai contoh yang sederhana yaitu persamaan diferensial autonomus berikut ini :

$$\dot{x} = -x$$

dengan \dot{x} adalah turunan dari x terhadap variable bebas t (biasanya mensimbolkan waktu). Jelas bahwa $x = 0$ merupakan solusi. Apabila nilai x positif maka nilai \dot{x} negatif sehingga nilai x mengecil ini artinya apabila diberikan nilai awal $x(0)$ positif maka solusi akan menuju ke nol demikian juga apabila diberi nilai awal $x(0)$ negatif maka solusi juga akan menuju nol sebab apabila x negatif maka \dot{x} bernilai positif. Dalam hal ini solusi $x = 0$ dikatakan stabil. Solusi $x = 0$ ini disebut juga sebagai solusi konstan atau solusi setimbang (equilibrium

solution) atau titik kritis (critical points). Solusi setimbang ini yang memegang peranan penting pada topic system dinamik. Keadaan di atas dapat digunakan untuk menggambarkan pergerakan partikel pada garis. Yakni apabila partikel tersebut berada disebelah kanan $x = 0$ maka akan bergerak menuju titik nol dan juga apabila partikel berada di sebelah kiri titik nol akan bergerak juga menuju nol dan apabila partikel berada di titik nol maka partikel tersebut akan tetap berada di nol (sampai kapanpun). Dengan demikian apabila kita mempunyai system persamaan autonomus yang terdiri dari dua variable tak bebas maka system tersebut bias untuk menggambarkan pergerakan partikel pada bidang dan apabila kita memiliki tiga variable tak bebas maka system tersebut dapat digunakan untuk menggambarkan pergerakan partikel pada ruang (semua pergerakan pada alam semesta yang kita tempati ini) seperti pergerakan angin atau udara pada ramalan cuaca ataupun pergerakan dari system tata surya kita dan lain sebagainya.

Di samping itu apabila pada system itu memuat suatu parameter maka kita bias membahas hal lain yakni yang disebut dengan bifurkasi yaitu perubahan apa saja yang terjadi apabila nilai parameter yang ada pada system tersebut divariasikan. Sebagai ilustrasi kita perhatikan persamaan diferensial autonomus berikut ini :

$$\dot{x} = x + \lambda x^2$$

dengan λ merupakan suatu parameter (skalar). Tampak bahwa solusi konstan atau solusi ekuilibriumnya ada dua yakni $x = 0$ dan $x = -\lambda$ (Solusi konstan diperoleh dengan cara meyamadengkan nol ruas kanan dari persamaan di atas). Dengan demikian apabila parameter λ divariasikan maka solusi konstannya akan mengalami perubahan juga yakni hanya mempunyai satu solusi konstan yaitu $x = 0$ saat nilai $\lambda = 0$. Sedangkan untuk nilai λ tidak nol maka system mempunyai dua solusi konstan. Tentu saja juga akan terjadi perubahan kestabilan dari masing-masing solusi konstan tersebut.

Selain kasus yang kontinu system dinamik juga muncul untuk kasus diskret yakni dinamik pada persamaan beda (difference equations). Kasus ini banyak muncul pada perhitungan numeric karena pada saat melakukan pendekatan secara numeric persamaan diferensial diubah menjadi persamaan beda.

C. Ketunggalan solusi

Secara umum persamaan diferensial biasa order satu autonomus dapat dituliskan dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x)$$

dengan x merupakan variable tak bebas yang bias berupa scalar atau vector. Apabila diberikan nilai awal tertentu yaitu $x(0) = x_0$ maka akan didapatkan solusi khusus yang bergantung pada nilai awal tersebut dan persamaannya dapat dituliskan menjadi

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad \dots \quad (1)$$

yang biasa juga dinamakan dengan Masalah Nilai Awal (Initial Value Problem). Apabila variable x berupa scalar maka persamaan di atas dapat diinterpretasikan sebagai pergerakan partikel pada garis sedangkan apabila variable x merupakan vector berdimensi 2 maka dapat diinterpretasikan sebagai gerakan partikel pada bidang datar dan apabila berdimensi 3 menggambarkan gerakan partikel pada ruang dan apabila berdimensi lebih dari 3 maka tidak dapat digambarkan secara visual.

Untuk kasus x merupakan variable scalar maka solusi dari persamaan (1) dapat diselesaikan dengan metode separation of variable dan didapatkan solusi dalam bentuk implicit

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds = t - t_0 \quad \dots \quad (2)$$

apabila integralnya dapat diselesaikan. Meskipun pengintegralan dapat dilaksanakan namun belum tentu hasil solusinya yang berbentuk implicit dapat dinyatakan secara eksplisit. Tapi pada kenyataannya tanpa mengetahui solusi secara eksplisit kita dapat menganalisis perilaku dari solusinya hanya dengan menganalisis sifat-sifat dari turunan-turunannya.

Namun solusi dari persamaan (1) belum tentu tunggal tergantung dari sifat fungsi f nya. Apabila fungsi f bersifat *smooth* artinya turunan dari fungsi f bersifat kontinu maka solusinya akan tunggal. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut ini.

Perhatikan masalah nilai awal

$$\dot{x} = \sqrt{x} \quad x(0) = x_0 \quad , x \geq 0$$

Solusinya dapat diperoleh secara eksplisit yakni

$$x(t) = \frac{(t + 2\sqrt{x_0})^2}{4}$$

dan untuk $x_0 = 0$ ada juga solusi yang lain yakni $x(t) = 0$ untuk semua nilai t . Jadi masalah nilai awal ini mempunyai solusi yang tidak tunggal untuk $x_0 = 0$.

Pada contoh di atas solusinya terdefiniskan untuk semua nilai t dengan kata lain terdefiniskan pada seluruh interval $(-\infty, +\infty)$. Hal ini tidak selalu terjadi artinya ada kasus dari suatu masalah nilai awal yang solusinya tidak terdefiniskan untuk seluruh interval seperti ditunjukkan pada contoh berikut. Perhatikan masalah nilai awal

$$\dot{x} = x^2 \quad x(0) = x_0$$

Dengan menggunakan formula (2) dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa solusi dari masalah nilai awal tersebut adalah

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

Sehingga untuk $x_0 > 0$ solusi terdefiniskan pada interval $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ sedangkan untuk $x_0 < 0$ solusi terdefiniskan pada interval $(\frac{1}{x_0}, +\infty)$ dan untuk $x_0 = 0$ solusinya $x(t) = 0$ pada seluruh interval $(-\infty, +\infty)$. Untuk contoh seperti yang sudah dibicarakan sebelumnya yaitu

$$\dot{x} = -x \quad x(0) = x_0$$

mempunyai solusi $x(t) = x_0 e^{-t}$, sehingga solusinya terdefiniskan pada seluruh interval di samping itu solusinya tunggal. Jadi ada kasus yang solusinya tidak tunggal dan juga solusinya tidak terdefiniskan pada seluruh interval. Untuk mengetahui apakah solusinya tunggal atau tidak maka ada rambu-rambu seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 1.1. (Keberadaan dan ketunggalan solusi)

Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

(i) Jika f merupakan fungsi kontinu maka ada suatu solusi $x(t) = \varphi(t, x_0)$ yang terdefiniskan pada suatu interval $I(\alpha, \beta)$ (yang bias jadi merupakan interval infinite) yang memuat $t_0 = 0$. Lebih lanjut jika α finite maka $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$ dan apabila β finite maka $\lim_{t \rightarrow \beta^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$.

(ii) Jika f merupakan fungsi yang turunan pertamanya kontinu maka solusi $x(t) = \varphi(t, x_0)$ tunggal dan lebih lanjut $\varphi(t, x_0)$ beserta turunan-turunan parsialnya kontinu pada bidang $t - x_0$.

Lebih lanjut $\varphi(t, x_0)$ disebut *flow* dari $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ dan untuk setiap nilai t *flow* $\varphi(t, x_0)$ mendefinisikan suatu pemetaan dari himpunan semua bilangan riil (R) ke R dengan aturan $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$. Dan sifat-sifat dari pemetaan tersebut seperti berikut ini :

(i) $\varphi(0, x_0) = x_0$

(ii) $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$ untuk setiap t dan s .

(iii) Untuk setiap t pemetaan $\varphi(t, x_0)$ mempunyai invers yakni pemetaan $\varphi(-t, x_0)$.

Suatu pemetaan dari R ke R yang memenuhi sifat di atas dinamakan suatu *system dinamik* di R .

D. Trayektori dari persamaan diferensial autonomus scalar

Perhatikan persamaan diferensial autonomus scalar

$$\dot{x} = f(x).$$

Ruas kanan dari persamaan di atas memberikan nilai turunan dari x terhadap t yang mana dapat diinterpretasikan sebagai penggal garis singgung yang melalui titik (t, x) pada bidang (dapat digambarkan sebagai anak panah yang berawal pada titik tersebut). Koleksi dari semua penggal garis seperti itu disebut medan arah (direction fields) dari persamaan di atas (seperti yang terlihat pada Gambar 1.1).

Grafik solusi dari persamaan di atas dengan nilai awal $x(0) = x_0$ (yang melalui x_0) adalah himpunan bagian pada bidang (t, x) yang didefinisikan sebagai himpunan $\{(t, \varphi(t, x_0)) | t \in I\}$ dan disebut *trayektori* yang melalui x_0 . Suatu trayektori akan menyinggung penggal garis pada medan arah di setiap titik yang dilaluinya.

Ruas kanan dari persamaan di atas tidak tergantung pada t secara eksplisit, sehingga pada sebarang garis yang sejajar dengan sumbu- t segmen garis pada medan arah mempunyai kemiringan yang sama. Dengan demikian kita dapat menyederhanakan keadaan dengan memperhatikan proyeksi dari medan arah ataupun trayektori pada sumbu- x . Untuk setiap titik x pada sumbu- x dapat dipasangkan dengan penggal garis berarah dari x ke $x+f(x)$. Kita dapat memandang garis berarah tersebut sebagai vector dengan pangkal titik x . Kumpulan dari semua vector seperti itu disebut medan vector (vector fields) yang dihasilkan oleh persamaan di atas. Untuk penyederhanaan dapat disebut medan vector dari f . Berikut ini akan diberikan suatu definisi yang disebut *orbit*.

Definisi 1.1. (orbit)

Positif orbit yang dinotasikan dengan $\gamma^+(x_0)$, negatif orbit yang dinotasikan dengan $\gamma^-(x_0)$ dan orbit yang dinotasikan dengan $\gamma(x_0)$ masing-masing didefinisikan sebagai berikut :

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta)} \varphi(t, x_0)$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha, 0]} \varphi(t, x_0)$$

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha, \beta)} \varphi(t, x_0)$$

Tampak dari definisi di atas bahwa orbit $\gamma(x_o)$ adalah proyeksi dari suatu trayektori yang melalui titik x_o . Kita dapat menambahkan gambar anak panah pada orbitnya yang menunjukkan arah perubahan dari $\varphi(t, x_o)$ apabila nilai t meningkat. Gambar gabungan tersebut dinamakan *phase portrait* (seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.3). Ada orbit yang sederhana (yang hanya berupa sebuah titik) namun memegang peranan penting pada permasalahan nilai awal ataupun aplikasinya. Hal itu didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1.2. (Titik kritis)

Sebuah titik \bar{x} di R disebut titik kesetimbangan (equilibrium points) atau titik kritis (critical points) atau juga disebut *steady state solutions* dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Dengan demikian apabila \bar{x} merupakan titik kritis maka fungsi konstan $x(t) = \bar{x}$ merupakan solusi dari $\dot{x} = f(x)$ dan disebut sebagai solusi konstan dan orbit $\gamma(\bar{x})$ merupakan himpunan singleton yakni $\gamma(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Lebih lanjut dengan mengetahui ada tidaknya titik kritis maka akan memudahkan kita menggambarkan phase portraitnya. Apa bila tidak ada titik kritis maka phase portraitnya hanya satu arah yaitu naik atau turun tergantung apakah $f(x)$ definite positif atau definite negatif. Untuk kasus hanya ada satu titik kritis maka apabila nilai t membesar solusinya akan menuju ke negatif tak hingga atau menuju titik kritis jika $f(x_o) < 0$. Dan sebaliknya apabila $f(x_o) > 0$ maka solusinya akan menuju ke positif tak hingga atau menuju titik kritis. Selanjutnya apabila masalah nilai awal dari persamaan diferensial autonomus scalar mempunyai solusi yang tunggal untuk setiap x_o maka solusinya bersifat sebagai berikut :

- (i) $\varphi(t, x_o)$ merupakan fungsi monoton dalam t ,
- (ii) $\varphi(t, x_o) < \varphi(t, y_o)$ untuk semua nilai t apabila $x_o < y_o$,
- (iii) Apabila $\gamma^+(x_o)$ terbatas maka $\varphi(t, x_o) \rightarrow \bar{x}$ untuk $t \rightarrow +\infty$,
- (iv) Apabila $\gamma^-(x_o)$ terbatas maka $\varphi(t, x_o) \rightarrow \bar{x}$ untuk $t \rightarrow -\infty$.

E. Kestabilan dari Titik Kritis

Pada persamaan diferensial autonomus scalar yang mempunyai titik kritis maka solusi-solusi yang nilai awalnya dekat dengan titik kritis adakalanya solusinya masih dekat dengan titik kritis tersebut namun kadang ada juga yang menjauhi titik kritis tersebut. Keadaan apabila semua solusi yang nilai awalnya dekat dengan titik kritis kemudian solusinya juga masih dekat dengan titik kritis tersebut maka dikatakan bahwa titik kritisnya *stabil* apabila tidak demikian maka dikatakan *tak stabil*. Definisi secara matematis dituliskan sebagai berikut :

Definisi 1.3. (Kestabilan titik kritis)

Sebuah titik kritis \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ dikatakan stabil apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat (dapat dicari) suatu $\delta > 0$ (yang bergantung pada ε) sedemikian sehingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ maka solusi $\varphi(t, x_0)$ yang melalui x_0 pada saat $t = 0$ memenuhi $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik kritis \bar{x} dikatakan tak stabil apabila dia bukan titik kritis yang stabil. Sedang titik kritis \bar{x} dikatakan stabil asimtotik apabila ia merupakan titik kritis yang stabil dan sekaligus memenuhi tambahan syarat yakni ada suatu bilangan positif r sedemikian sehingga $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0$ jika $t \rightarrow +\infty$ untuk semua x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < r$.

Berdasarkan definisi di atas untuk mengetahui kestabilan suatu titik kritis harus tahu dulu secara eksplisit bagaimana bentuk dari solusinya, tentu saja untuk fungsi f yang tidak sederhana maka solusi eksplisitnya belum tentu didapatkan. Berikut ini ada dua teorema yang secara teknis bias membantu untuk melihat apakah titik kritisnya stabil atau tidak.

Teorema 1.2.

Titik kritis \bar{x} (critical points) dari $\dot{x} = f(x)$ dikatakan stabil jika ada suatu bilangan positif δ sedemikian sehingga $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$ untuk $|x - \bar{x}| < \delta$. Titik kritis \bar{x} asimtotik stabil jika dan hanya jika ada suatu bilangan positif δ sedemikian sehingga $(x - \bar{x})f(x) < 0$ untuk $0 < |x - \bar{x}| < \delta$. Sedangkan titik kritis \bar{x} dikatakan tak stabil jika ada suatu bilangan positif δ sedemikian sehingga $(x - \bar{x})f(x) > 0$ untuk $0 < x - \bar{x} < \delta$ atau $-\delta < x - \bar{x} < 0$.

Teorema 1.3

Misalkan f sebuah fungsi yang turunan pertamanya kontinu dan titik \bar{x} di R merupakan titik kritis (critical points) dari $\dot{x} = f(x)$ yakni $f(\bar{x}) = 0$. Jika $f'(\bar{x}) < 0$ maka titik kritis \bar{x} asimtotik stabil dan jika $f'(\bar{x}) > 0$ maka titik kritis \bar{x} tak stabil.

Salah satu contoh penggunaan teorema di atas adalah pada persamaan diferensial berikut. Misalkan diberikan persamaan diferensial autonomus scalar

$$\dot{x} = x(1 - x^2).$$

Untuk permasalahan ini dapat dituliskan bahwa $f(x) = x(1 - x^2)$, sehingga persamaan di atas mempunyai tiga buah titik kritis yakni $x = 0$, $x = -1$ dan $x = 1$ yang diperoleh dari menyelesaikan persamaan $x(1 - x^2) = 0$. Selanjutnya dengan menurunkan fungsi f terhadap variable x diperoleh hasil $f'(x) = 1 - 3x^2$. Dengan demikian untuk menentukan kestabilan dari titik-titik kritisnya tidak perlu menyelesaikan persamaan diferensial di atas untuk mendapatkan solusinya secara eksplisit, namun cukup dengan mengevaluasi nilai dari $f'(x)$ pada titik-titik kritisnya. Hasilnya adalah $f'(0) = 1$, $f'(-1) = -2$ dan $f'(1) = -2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kritis $x = 0$ merupakan titik kritis yang tak stabil

sebab nilai dari $f'(0)$ positif, sedangkan dua titik kritis yang lain yakni $x = -1$ dan $x = 1$ keduanya bersifat stabil asimtotik karena nilai dari $f'(-1)$ dan $f'(1)$ bernilai negatif.

Namun teorema di atas tidak dapat diaplikasikan pada kasus persamaan diferensial autonomus

$$\dot{x} = x^2 \quad .$$

Hal ini dikarenakan persamaan di atas mempunyai satu titik kritis yakni $x = 0$ dan nilai $f'(0) = 0$ sebab $f(x) = x^2$ sehingga $f'(x) = 2x$. Dengan demikian untuk mengetahui kestabilan titik kritisnya dapat dilihat dari phase portraitnya atau dengan mendapatkan solusi eksplisitnya.

Soal latihan

Nomor 1 : Diberikan persamaan diferensial autonomus

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Apakah persamaan tersebut mempunyai solusi yang tunggal?

Nomor 2 : Gambarkan trayektori dari persamaan diferensial berikut

$$\dot{x} = x^2(1 + x)$$

apabila diberikan nilai awal $x(0) = -1, x(0) = \frac{1}{2}, x(0) = \frac{-1}{2}, x(0) = -2$. Selanjutnya tentukan kestabilan dari titik-titik kritisnya. Apakah teorema 1.3 dapat diaplikasikan?