BARISAN DAN DERET BILANGAN Penyusun: Atmini Dhoruri, MS		
Kode:	Jenjang: SMP	T/P: 1/2

A. Kompetensi yang diharapkan

1. *Menentukan suku ke-n barisan aritmatika dan barisan geometri*
2. *Menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika dan deret geometri*
3. *Memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret*

B. Indikator

1. *Menjelaskan pengertian barisan aritmetika*
2. *Menentukan rumus suku ke-n barisan aritmetika*
3. *Menjelaskan pengertian barisan geometri*
4. *Menentukan rumus suku ke-n barisan aritmetika*
5.
6. *jumlah n suku pertama deret aritmetika*
7. *Menghitung nilai suku ke n dan jumlah n suku yang pertama deret aritmetika*
8. *Menjelaskan pengertian deret geometri*
9. *Menentukan rumus suku ke-n dan julmlah n suku yang pertama deret geometri*
10. *Menentukan sifat-sifat deret aritmetika dan deret geometri*
11. *Menggunakan sifat-sifat deret aritmetika dan geometri untuk menyelesaikan masalah*

Barisan Aritmetika dan deret aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika sering juga disebut ***barisan hitung*** adalah barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan menambah atau mengurangi dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap tersebut dinamakan *pembeda*, (biasanya disimbolkan dengan *b).* Jadi pembeda merupakan selisih antara dua suku yang berturutan. Suku pertama barisan aritmetika ditulis u_1 , sedangkan suku ke-n dari suatu barisan bilangan aritmetika dituliskan sebagai u_n.

Contoh:

1) Barisan aritmetika : 3, 7, 11, 15,...

   Suku pertamanya $u_1 = 3$. Selisih antara dua suku yang berturutan adalah 7 -3 = 11-7 = 15-11 = 4. Jadi pembedanya adalah 4.

2) Barisan bilangan: 26, 23, 19, 16,...

   Suku pertamanya $u_1 = 26$. Selisih antara dua suku yang berturutan adalah 23 -26 = 19-23 = 16-19 = -3. Jadi pembedanya adalah -3.

2. Rumus suku ke-n dari barisan aritmetika

Untuk menentukan suku ke-n suatu barisan bilangan aritmetika dimana n relatif besar tentunya akan sulit jika kita harus menuliskan seluruh anggota barisan bilangan tersebut. Untuk itu diperlukan cara untuk menentukan suku ke-n dari suatu barisan bilangan aritmetika dengan *n* sembarang bilangan asli.

Misal suku pertama suatu barisan aritmetika adalah *a* dengan pembeda *b*, maka barisan aritmetika tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$a,\ a + b,\ a + b + b,\ a + b + b + b,\ ....$$

atau dapat dituliskan

$$a,\ a + b,\ a + 2b\ ,\ a + 3b,\ \ldots$$

Dari barisan di atas, jika suku-1 ditulis u_1, suku ke-2 ditulis u_2,….dst maka diperoleh barisan $u_1, u_2, u_3 ...$

Selisih antara dua suku yang berturutan $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = ... = b$

Sehingga dapat dibuat tabel berikut:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...	u_n
a	*a + b*	*a + 2b*	*a +3b*	*a +5b*	…	*?*
a+(1-1)b	*a+(2-1)b*	*a+(3-1)b*	*a+(4-1)b*	*a+(6-1)b*	...	*a + (n-1)b*

Jadi rumus suku ke-n dari barisan aritmetika adalah:

atau

$$\boxed{u_n = a + (n - 1)\, b}$$

$$u_n = u_1 + (n - 1)\, b$$

Keterangan :

u_n = suku ke-n

u_1 = suku pertama

a = *suku pertama*

b = pembeda

Contoh :

1. Tentukan suku ke-21 dari barisan aritmetika : 17, 15, 13, 11,…

   Penyelesaian:

   Diketahui a = 17, b = -2, dan n = 21, maka U_{21} = 17 + (21-1)(-2) = -23

2. Diketahui suku ke-1 dari barisan aritmetika adalah 6 dan suku kelimanya 18, tentukan pembedanya.

   Penyelesaian:

   Diketahui a = 6, dan U_5 = 18

   $U_n = a + (n - 1)\, b$

   $U_5 = 6 + (5 - 1)\, b$

   $18 = 6 + 4b$

   $4b = 12$

   $b = 3$

   Jadi pembedanya adalah 3.

Barisan aritmetika yang bilangan-bilangannya semakin besar nilainya disebut *barisan aritmetika naik*, sedangkan barisan aritmetika yang bilangan-bilangannya semakin kecil nilainya disebut barisan aritmetika turun. Pembeda pada barisan aritmetika naik bernilai positif, sedangkan pembeda pada barisan aritmetika turun adalah negatif.

Contoh:

1) *2, 5, 8, 11, 14,…..* , pembedanya adalah 3 (positif), jadi barisan tersebut merupakan barisan naik.

2) *45, 43, 41, 39,…..*, pembedanya adalah -2 (negatif), jadi barisan tersebut merupakan barisan turun.

3. Rumus Suku Tengah Barisan Aritmetika

Pada barisan aritmetika, suku yang terletak di tengah jika banyaknya suku ganjil dinamakan suku tengah. Misalnya diberikan barisan aritmetika $u_1, u_2, u_3 ... u_n$ dengan n ganjil dan suku tengahnya adalah u_t maka berlaku

$$u_t = u_{\frac{n+1}{2}} = a + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)b$$

$$= a + \left(\frac{n+1-2}{2}\right)b = a + \left(\frac{n-1}{2}\right)b = \frac{1}{2}\left(2a + (n-1)b\right) = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_n\right)$$

Jadi suku tengah barisan aritmetika adalah

$$u_t = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2\right)$$

4. Suku sisipan

Misalkan diberikan dua bilangan p dan q, kemudian disisipkan k buah bilangan diantara kedua bilangan tersebut sehingga membentuk barisan aritmetika dengan beda b sebagai berikut:

p, (p + b), (p +2b), ..., (p+kb), q

maka beda b dari barisan tersebut dapat ditentukan sebagai berikut:

$$b = u_n - u_{n-1} = q - (p + kb)$$
$$b = q - p - kb$$
$$kb + b = q - p$$
$$b(k+1) = q - p$$
$$b = \frac{q-p}{k+1}$$

Jadi beda barisan aritmetika yang terbentuk adalah $b = \frac{q-p}{k+1}$.

Soal Latihan

1. Suku pertama barisan aritmetika adalah 34 dan suku ke-6 adalah 19, tentukan suku ke-23.
2. Suku pertama barisan aritmetika adalah –54 dan suku ke-4 adalah –42, tentukan suku ke-34
3. Pada suatu barisan aritmetika suku ke-1 adalah 15 dan suku ke-6 adalah 30, tentukan suku ke-42
4. Suku keempat suatu deret aritmetika adalah 9 dan jumlah suku keenam dan kedelapan adalah 30. Tentukan suku ke 20

5. Ani memiliki tabungan awal Rp 100.000,00. Setiap hari ia menambah tabungannya sebesar Rp 2000,00.
   a. Berapa besar tabungan Ani setelah 20 hari?
   b. Berapa besar tabungan ani setelah 1 tahun?
   c. Setelah berapa lama tabungan Ani menjadi 1 juta?

3. Deret Aritmetika

Perhatikan barisan aritmetika 3, 5, 7, 9, ….

Dari barisan aritmetika tersebut dapat dibuat suatu deret aritmetika :

$S_n = 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots.$

Dengan demikian jika diketahui suatu barisan bilangan aritmetika : $u_1, u_2,, u_3,, \ldots u_n$ maka dapat dibuat suatu deret aritmetika:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_n$

Bagaimanakah cara menentukan rumus S_n?

Perhatikan bahwa

$u_1 = a,$

$u_2 = a + b$

$u_3, = a+2b$

…………

$u_n = a + (n-1)b$

Maka diperoleh

$$\begin{array}{ll} S_n & = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ldots. + .(a + (n-1)b) \\ S_n & = (a + (n-1)b) + (a + (n-2)b) + \qquad \ldots. + a \\ \hline 2\,S_n & = (2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + \ldots. + (2a + (n-1)b) \end{array} +$$

atau :

$$2\,S_n = n\,(2a + (n - 1\,)b$$

jadi :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1\,)b)} \quad \text{atau} \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + u_n)}$$

Rumus di atas menyatakan *jumlah n suku pertama dari deret aritmetika.*

Untuk setiap deret aritmetika berlaku :

$$\boldsymbol{S_n - S_{n-1} = u_n}$$

dimana (u_n = suku ke n dari deret aritmetika)

Pada suatu deret aritmetika, jika pembeda barisan positif maka deret yang terbentuk disebut ***deret aritmetika naik*** dan jika pembeda barisan negatif maka deret yang terbentuk disebut ***deret aritmetika turun.***

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut :

Contoh :

1. Diketahui deret aritmetika 3 + 7 + 11 + 15 + ……
   a. Tentukan suku ke –34
   b. Tentukan S_{16}
   c. Selidiki apakah deret tersebut termasuk deret naik atau deret turun!

Penyelesaian:

a. Diketahui deret 3 + 7 + 11 + 15 + …… berarti *a* = 3 dan *b* = 4

   Suku ke-34 adalah $u_{34} = 3 + (34-1)4$ = 3 + 33.4 = 135.

b. $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

   $S_{16} = \frac{16}{2}(2.3 + (16-1)4)$

   = $8(6+60)$

   = 8 (66)

   = 528.

c. Karena pembedanya b = 4 positif, maka termasuk deret naik.

2. Diketahui deret aritmetika 48 + 45 + 42 + 39 + ……
   a. Tentukan suku ke –26
   b. Tentukan S_{18}
   c. Selidiki apakah deret tersebut termasuk deret naik atau deret turun!

Penyelesaian:

a. Diketahui deret 48 + 45 + 42 + 39 + ……berarti a = 48 dan b = -3

Suku ke-34 adalah $u_{26} = 48 + (26-1)(-3)$ = 48 + (25).(-3) = -27.

b. $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_{18} = \frac{18}{2}(96 + (18-1)(-3))$

= $9(96-51)$

= 9 (45)

= 405.

c. Karena pembedanya b = -3 negatif, maka termasuk deret turun.

Soal Latihan

1. Diketahui deret aritmetika sebagai berikut :

   (k + 25) + (k + 19) +(k + 13)+ …

   a. Tentukan pembeda pada deret tersebut !
   b. Tentukan suku ke – 8 dan ke – 16 pada deret tersebut !
   c. Hitung jumlah enam suku pertama pada deret tersebut !

2. Pada tanggal 1 Maret Desta diberi hadiah dua manik-manik oleh kakaknya. Hari berikutnya diberi 4 manik-manik. Setiap hari yang berturutan Desta diberi manik-manik dengan jumlah bertambah 2.

   a. Berapa banyaknya manik-manik yang diterima Desta pada tanggal 31 Maret ?
   b. Berapa jumlah manik-manik yang dimiliki Desta sampai dengan tanggal 31 Maret ?

3. Pak Hardi membeli beras 320 kg untuk persediaan di tokonya. Hari pertama terjual 5 kg beras, hari kedua terjual 10 kg. Setiap hari yang berturutan terjual 5 kg lebih besar dari pada hari sebelumnya. Dalam berapa hari beras pak Hardi habis terjual ?

4. Pak Harun bekerja di sebuah perusahaan swasta yang memberikan bonus akhir tahun pada karyawannya sebesar 10 % gaji untuk tahun pertama. Akhir tahun kedua karyawan berhak menerima bonus 2 kali lipat bonus tahun pertama. Akhir tahun

ketiga menerima bonus tiga kali lipat bonus tahun pertama dan seterusnya. Jika gaji pak Harun pada tahun 2005 adalah 1 juta perbulan, maka :

a. Berapakah bonus yang diterima pak Harun akhir tahun 2008 ?
b. Berapakah bonus yang diterima pak Harun pada akhir tahun 2010 ?
c. Berapakah banyaknya bonus yang akan diterima pak Harun selama 10 tahun ?

2. *Barisan Geometri*

Barisan geometri atau ***barisan ukur*** adalah barisan bilangan yang tiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan dengan suatu bilangan tetap yang tidak sama dengan nol. Bilangan tetap tersebut dinamakan *pembanding* atau *rasio*, (biasanya disimbolkan dengan *p).*

Pada barisan geometri berlaku:

$$\frac{suku\ ke-2}{suku\ ke-1} = \frac{suku\ ke-3}{suku\ ke-2} = \ldots \frac{suku\ ke-n}{suku\ ke-(n-1)} = p$$

dalam hal ini *p* disebut *pembanding.*

Untuk menentukan suku ke-n pada barisan geometri, maka harus ditentukan hubungan antara masing-masing suku dengan bentuk bilangan berpangkat. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut :

Diketahui barisan geometri: 9, 27, 81, 243 …

Maka

$u_1 = 9 = 9 \times 3^{1-1}$ $\qquad$ $u_2 = 27 = 9 \times 3^{2-1}$

$u_3 = 81 = 9 \times 3^{3-1}$ $\qquad$ $u_4 = 243 = 9 \times 3^{4-1}$

……………….*dst*

Jadi, $u_n = 9 \times 3^{n-1}$

Perhatikan bahwa, jika *a* adalah suku pertama dan *p* adalah pembanding, maka barisan geometri dapat ditulis sebagai: $a, ap, ap^2, ap^3, \ldots$

Dari barisan di atas, jika suku-1 ditulis u_1, suku ke-2 ditulis u_1,….dst diperoleh barisan $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots..$

Sehingga dapat dituliskan

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	……	u_n
a	*ap*	*ap*^{2}	*ap*^{3}	*ap*^{4}	…..	?
a	*a* x *p*	*a* x *p*$^{3-1}$	*a* x *p*$^{4-1}$	*a* x *p*$^{5-1}$	…..	*a* x *p*$^{n-1}$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah

$$u_n = a \times p^{n-1}$$

atau

$$u_n = u_1 \times p^{n-1}$$

Keterangan :

u_n = suku ke-n

u_1 = suku ke-1

a = suku pertama

p = pembanding

Contoh

1. Carilah suku ke-11 dari barisan 2, 6, 18, …

   Penyelesaian:

   Diketahui a = 2 dan $p = \frac{6}{2} = 3$, maka diperoleh $u_n = a \times p^{n-1}$

   $u_{11} = 2 \times 3^{11-1}$

   $u_{11} = 2 \times 3^{10} = 2 \times 59049 = 118098$

2. Jika suku ke-1 dari satu barisan geometri adalah 27 dan suku ke-4 sama dengan 1, tentukan pembandingnya!

   Penyelesaian:

   Diketahui a = 27, dan $u_4 = 1$, maka diperoleh

   $u_n = a \times p^{n-1}$

$$1 = 27 \times p^{4-1}$$

$$1 = 27 \times p^{3}$$

$$p^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$ Jadi $p = \frac{1}{3}$.

Soal Latihan

1. Dalam kejuaraan basket tingkat nasional putaran pertama diikuti oleh 128 team. Putaran kedua diikuti oleh 64 team dan putaran berikutnya 32 team, 16 team dan seterusnya. Tuliskan aturan untuk menjelaskan barisan bilangan tersebut dan carilah tiga suku berikutnya!
2. Tentukan pembanding dan suku ke-24 dari barisan geometri berikut.
   a. 64, 16, 4, 1,….
   b. 2, 6, 18, 54,….
   c. 81, 27, 9, 3,….
   d. 78, -36, 18, -9, ….
   e. 2, -4, 8, -16, …
3. Tentukan pembanding dan suku ke-10 dari barisan geometri jika diketahui.
   a. suku pertama 8 dan suku ke-6 adalah $\frac{1}{4}$
   b. suku pertama 3 dan suku ke-5 adalah 243
   c. suku ke-3 adalah 12 dan suku ke-6 adalah 96
   e. suku ke-4 adalah 16 dan suku ke-6 adalah 64
4. Diketahui barisan geometri suku pertamanya 3 dan suku ketiganya -81.Tentukan suku ke-22 barisan tersebut.
5. Pada suatubarisan geometri diketahui suku ke-19 adalah 13, sedangkansuku ke-21 adaalah 117. Tentukan dua nilai yang mungkin dari suku ke-20.

2. Deret Bilangan

Secara umum, ***deret*** diartikan sebagai jumlah dari suku-suku suatu barisan bilangan dan biasanya disimbolkan dengan S_n. Jika diketahui barisan dengan suku-suku $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$, maka secara matematis dapat dituliskan :

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}$$

Beberapa pengertian tentang deret

Deret berhingga adalah deret yang banyaknya suku berhingga, atau disebut jumlah n suku pertama dari barisan berhingga. Deret berhingga dinyatakan dengan S_n.

Contoh :

Barisan *2, 4, 6, 8, 10* adalah barisan hingga yang terdiri dari 5 suku. Maka, deret

$S_1 = 2,$

$S_2 = 2 + 4 = 6$

$S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$

$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ *dan*

$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

disebut deret hingga dari barisan *2, 4, 6, 8, 10* .

Deret tak berhingga adalah deret yang diperoleh dari suatu barisan tak hingga, atau disebut jumlah sampai tak hingga suku-suku barisan tak hingga. Deret tak hingga dinotasikan dengan S_∞.

2. Deret Geometri

Perhatikan barisan geometri 2, 4, 8, 16,….Jika suku-suku dari barisan geometri tersebut dijumlahkan maka akan diperoleh deret geometri. Jadi 2 + 4 + 8 + 16 +……dalah deret geometri.

Secara umum dapat dikatakan bahwa, jika diketahui *n* suku yang pertama dari suatu barisan geometri, maka jumlah n suku yang pertama diartikan sebagai ***deret geometri.***

Jika $a, ap, ap^2, ap^3, \ldots, ap^{n-1}$ *adalah* ***barisan geometri ,*** *maka*

$S_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-1}$ *adalah* ***deret geometri***

Jumlah n suku yang pertama barisan geometri

Bagaimanakah cara untuk menentukan jumlah n suku pertama deret geometri?

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{array}{lcl}
U_n & = & a,\ ap,\ ap^2,\ ap^3,\ \ldots,\ ap^{n-1} \\
\mathbf{S_n} & = & a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-1} \\
p\,\mathbf{S_n} & = & ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-1} + ap^n \\
\hline
\mathbf{S_n(1-p)} & = & \mathbf{a - ap^n}
\end{array}
\quad -
$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{a - ap^n}{1-p}$$

sehingga diperoleh :

$$\boxed{S_n = a\frac{1-p^n}{1-p}}$$

Rumus tersebut berlaku untuk $0 < p < 1$. Sedangkan untuk *p* yang lain berlaku

$$\boxed{S_n = a\frac{p^n - 1}{p-1}}$$

Contoh :

1. Diketahui deret aritmetika 2 + 6 + 18 + 54 + ……
   a. Tentukan pembanding deret tersebut
   b. Tentukan suku ke-21 dari deret tersebut
   c. Tentukan jumlah 9 suku pertama suku pertama dari deret tersebut

Penyelesaian:

a. Pembanding deret tersebut adalah: 3

b. Diketahui deret 2 + 6 + 18 + 54 + ……berarti $a = 2$ dan $p = 3$

   Suku ke-21 adalah $u_{21} = 2.3^{21-1} = 2.3^{20}$.

c. $S_9 = 2\left(\frac{3^9 - 1}{3-1}\right) = 2\frac{19682}{2} = 19682$

Soal Latihan

1. Diketahui deret berikut : 3 + 9 + 27 + 81 + …
   a. Tentukan suku ke – 8 pada deret tersebut !
   b. Tentukan jumlah 8 suku yang pertama pada deret tersebut !
2. Bakteri berkembang biak dengan membelah diri setiap 30 menit. Jika banyaknya bakteri adalah 200, hitung banyaknya bakteri yang akan tumbuh setelah 12 jam dan setelah 24 jam !

E.Rangkuman

1. Barisan Bilangan

(1) Barisan aritmetika *a, a + b, a + 2b , a + 3b, …*

Rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah $u_n = a + (n - 1)\, b$, dengan *a* adalah

suku pertama, *b* adalah pembeda.

(2) Barisan geometri : *a, ap,* ap^2, ap^3,…

Rumus susku ke-n barisan geometri adalah $u_n = a \times p^{n-1}$, dengan *a* adalah suku pertama, *p* adalah pembanding.

II. Deret Bilangan

(1) Dari barisan bilangan aritmetika $u_1, u_2, u_3, ...u_n$ dapat dibentuk deret bilangan $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Berati dari barisan aritmetika *a, a + b, a + 2b , a + 3b, …, a +(n-1)b*

diperoleh deret aritmetika *a+(a + b) +(a + 2b) + (a + 3b)+ … a +(n-1)b*

(2) Rumus jumlah n suku deret aritmetika adalah $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b$

atau $S_n = \frac{n}{2}(a + u_n)$.

(3) Dari barisan bilangan geometri : $u_1, u_2, u_3, ...u_n$ dapat dibentuk deret bilangan $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Berati dari barisan aritmetika: *a, ap,* ap^2, ap^3,…,ap^{n-1}

diperoleh deret geometri : $a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-1}$

(4) Rumus jumlah n suku deret geometri adalah $S_n = a\dfrac{1-p^n}{1-p}$ atau

$$S_n = a\frac{p^n - 1}{p-1}.$$