Pemanfaatan *Geogebra* untuk Menggambar Potret Fase Sistem Persamaan Diferensial

The Use of *Geogebra* to Draw Phase Portrait of Differential Equations Systems

Eminugroho Ratna Sari
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
eminugroho@uny.ac.id

ABSTRAK

Perilaku solusi sistem persamaan diferensial seringkali akan lebih mudah diinterpretasikan melalui grafik, tetapi hal ini tidak mudah digambar tanpa bantuan *software*. Padahal s*oftware* matematika seringkali membutuhkan bahasa pemrograman yang rumit untuk mendapatkan hasil yang diinginkan. Hal ini tidak mudah dilakukan bagi pemula. Sementara, di lain pihak terdapat *software* yang lebih mudah digunakan, khususnya dalam menggambar grafik. Tujuan penulisan paper ini adalah bagaimana memanfaatkan *Geogebra* sebagai *software* yang *user friendly* untuk menggambar potret fase sistem persamaan diferensial untuk mengamati perilaku solusinya. Akan diberikan langkah-langkah menggambar potret fase sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear. Berdasarkan potret fase dapat diketahui perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium.

Kata Kunci: *Geogebra*, potret fase, sistem persamaan diferensial

ABSTRACT

The behavior of solutions of differential equations systems will be more easily interpreted by graphs, but this is not easy drawn without software. As known, mathematics software often requires a complicated programming language to get the desired results. It is not easy for beginners. On the other hand, there is software that is easier to use, especially in drawing a graph. The purpose of this paper is how to utilize GeoGebra as user friendly software to draw a phase portrait of a system of differential equations. Step-by-step drawing phase portrait systems of differential equations both linear and nonlinear will be given. Based on the phase portrait can be seen the behavior of solutions around the equilibrium point.

Keywords: *Geogebra,* phase portrait, differential equations systems

Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat derivative atas satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu atau lebih variable bebas. Jika persamaan hanya memuat satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu variable bebas, maka disebut persamaan diferensial biasa. Lebih lanjut, suatu fungsi f disebut solusi dari persamaan diferensial jika f terdefinisi pada suatu persamaan diferensial beserta turunan-turunannya pada suatu interval I, dan apabila disubstitusi ke persamaan diferensial tersebut akan terpenuhi. Suatu persamaan diferensial disebut linear jika (1) variable tak bebas dan/atau turunan-turunannya bukan merupakan fungsi transenden, (2) pangkat dari variable tak bebas dan turunan-turunannya adalah satu, (3) tidak ada perkalian antara variable tak bebas dengan dirinya sendiri, atau dengan turunan-turunannya, atau antar turunan-turunannya (Ross, 1984).

Himpunan berhingga dari persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial. Hal menarik yang dapat dilihat setelah mendapatkan solusi suatu sistem persamaan diferensial adalah dengan menganalisa perilaku dari solusi sistem tersebut. Bucur (2006) telah membahas mengenai teori perilaku solusi suatu persamaan diferensial. Sementara Ademola (2011) menganalisa kestabilan untuk persamaan diferensial nonlinear. Perilaku solusi sistem persamaan diferensial juga sering diaplikasikan dalam pemodelan matematika di bidang biologi. Bagaimana penyebaran suatu penyakit dapat dianalisa sehingga dapat diprediksi kapan akan terjadi epidemic. Model SIR merupakan pemodelan epidemiologi pertama kali yang diperkenalkan oleh Kermack & McKendrick (1927). Pada model klasik ini diasumsikan tidak ada kelahiran dan kematian. Modifikasi model ini terus mengalami perkembangan, mulai dari muncul model SIR dengan adanya kelahiran dan kematian, model SIR dengan efek demografi, model SIR dengan vaksinasi (Keeling, Tildesley, House, & Danon, 2013), bahkan dengan control (Bakare, Nwagwo, & Danso-Addo, 2014).

Analisa mengenai perilaku solusi ini tidak mudah dilakukan. Namun demikian, dapat juga dianalisa melalui potret fase. Menggambar potret fase tanpa bantuan *software* seringkali juga tidak mudah dilakukan. Dewasa ini *software* matematika telah banyak ada antara lain MAPLE, MATLAB, WinGeom, WinPlot, maupun *Geogebra.*

Geogebra merupakan salah satu *software* yang *free download* yang sering digunakan dalam pembelajaran matematika karena fiturnya yang lengkap dan interaktif. *Geogebra* juga relative lebih mudah digunakan daripada *software* yang lain karena tidak membutuhkan bahasa pemrograman yang rumit (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008). Salah satu yang bisa dimanfaatkan dari Geogebra adalah menggambar potret fase dari sistem persamaan diferensial.

Pada paper ini akan dibahas mengenai penggunaan *Geogebra* untuk menggambar trayektori solusi sistem persamaan diferensial, lebih lanjut bagaimana potret fase dari sistem tersebut. Pertama akan dibahas untuk sistem persamaan diferensial linear. Pada bagian ini, akan diberikan contoh-contoh sistem persamaan diferensial linear yang kemudian dianalisa bagaimana perilaku solusi sistem tersebut melalui potret fase yang diperoleh dengan *Geogebra*. Selanjutnya akan dibahas bagaimana penggunaan *Geogebra* untuk menggambar trayektori solusi sistem persamaan diferensial nonlinear, dalam hal ini yang akan dibahas untuk model SIR.

Untuk itu, berikut diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan sistem persamaan diferensial. Antara lain definisi solusi sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium dan kestabilan.

Sistem Persamaan Diferensial

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, kestabilan, bidang fase, trayektori dan potret fase. Diberikan sistem persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, i = 1, 2, ..., n.

Sistem (1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)'$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$.

Selanjutnya notasi $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (2) yang melalui $\boldsymbol{x}_0$.

Selanjutnya akan diberikan definisi titik ekuilibrium suatu sistem pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 1 (Perko, 1991)

Titik $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2) jika $f(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$.

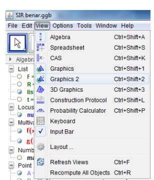
Definisi 2 (Perko, 1991)

Diberikan $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ titik ekuilibrium Sistem (2).

i. *Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>stabil lokal</u> jika untuk setiap bilangan ε > 0, terdapat bilangan δ = δ (ε) > 0, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\boldsymbol{x}(t)$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ berlaku $\|\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$, untuk setiap $\mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$.*
ii. *Suatu titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>tak stabil</u>, jika tidak dipenuhi (i).*
iii. *Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>stabil asimtotik lokal</u> , jika titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ stabil dan jika terdapat $\delta_0 > 0$, sehingga untuk*

untuk menggambar potret fase maupun solusi *S* dan *I* dengan Geogebra:

1. Menetapkan maksimum nilai *t* yang digunakan dalam gambar. Misal maxT = 15.
2. Membuat titik *A* dan *B* di sumbu-*y* sebagai nilai awal dari solusi *S* dan *I,* berturut-turut. Misal A = (0,4) dan B = (0,1)
3. Membuka jendela sebagai tempat untuk menggambar grafik yang kedua (dalam hal ini disebut Graphic 2), dengan cara klik *view –> graphic 2,* seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 8. Membuka Graphic 2

Tujuannya adalah untuk menggambar trayektori solusi dan potret fase Sistem (8)

4. Membuat titik C ditempatkan di Graphic 2, yaitu C = (y(A),y(B)), sebagai nilai awal dari trayektori solusi
5. Menginput fungsi ruas kanan dari Sistem (8), dalam hal ini diambil $\alpha = 0.33$ dan $\beta = 0.48$, sedangkan *S* dinyatakan dengan *x* dan *I* dinyatakan dengan *y,* jadi

   f(x,y)=-0.48*x*y dan
   g(x,y)=0.48*x*y - 0.33*y

6. Menggambar trayektori solusi yang akan muncul di Graphic 2, dalam hal ini sumbu-*x* menyatakan *S* dan sumbu-*y* menyatakan *I,* yaitu

   SolveODE[g, f, x(C), y(C), maxT, 0.01]

7. Menggambar potret fase Sistem (8), yaitu

   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, 0, 5, 0.2], j, 0, 5, 0.2]

8. Membuat barisan *t,* yang digunakan untuk melihat perilaku masing-masing solusi *S* dan *I,* yaitu

   t= Sequence[i, i, 0, 1, 0.01] maxT

9. Membuat barisan R, untuk titik-titik solusi dari *S,* yaitu

   R=Sequence[x(Point[numericalIntegral1, i]), i, 0, 1, 0.01]

10. Menggambar solusi dari *S* pada Graphic 1, dalam hal ini sumbu-*x* sebagai *t,* sedangkan sumbu-*y* sebagai *S,* yaitu

    Polyline[Sequence[(Element[t, i], Element[R, i]), i, 1, 100]]

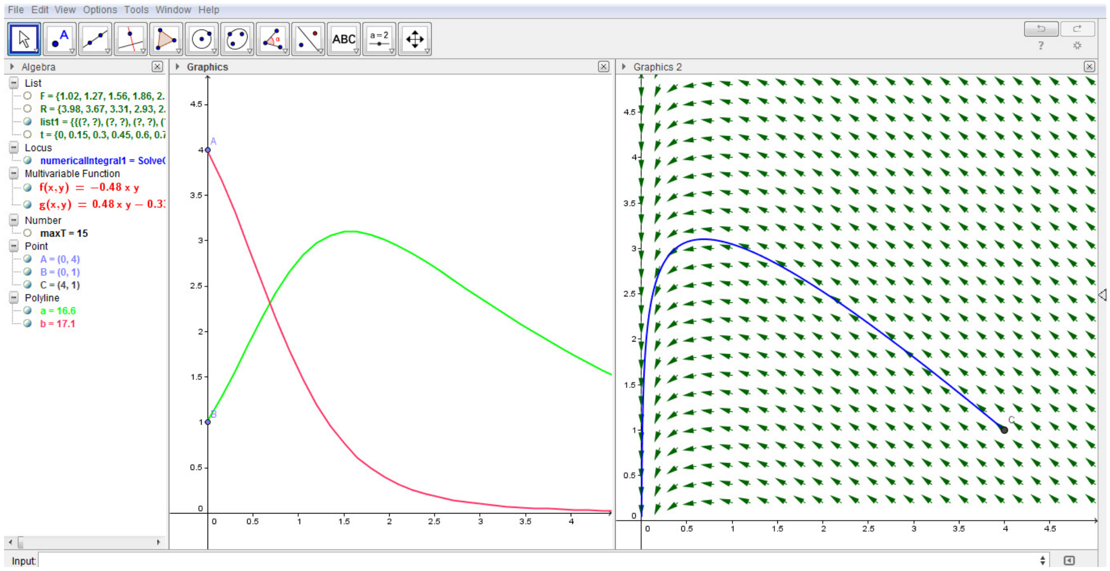
11. Membuat barisan F, untuk titik-titik solusi dari *I,* yaitu

    F=Sequence[y(Point[numericalIntegral1, i]), i, 0, 1, 0.01]

12. Menggambar solusi dari I pada Graphic 1, yaitu

Polyline[Sequence[(Element[t, i], Element[F, i]), i, 1, 100]]

Berdasarkan langkah 1 – 12, maka diperoleh



Gambar 9. Graphic 1 (sebelah kiri) menyatakan solusi dari S (warna merah) dan I (warna hijau). Graphic 2 menyatakan trayektori solusi dan potret fase Sistem (8).

Berdasarkan Gambar 9 bagian Graphic 1 tampak bahwa populasi S turun karena masuk ke kelas I, pada saat itu populasi I akan naik. Sementara dari Graphic 2 dapat terlihat bahwa solusi menuju ke titik ekuilibrium $(0,0)^T$, artinya di titik ini solusinya stabil.

Kesimpulan

Geogebra sangat bermanfaat dalam pembuatan grafik fungsi. Pada paper ini lebih menekankan bagaimana cara mendapatkan trayektori solusi dan potret fase suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear dengan memanfaatkan Geogebra. Diharapkan dengan menggunakan *software* ini penguasaan konsep mengenai perilaku solusi suatu sistem persamaan diferensial menjadi lebih baik lagi.

Pustaka

Ademola, A. T., & Arawomo, P. O. (2011). Stability, Boundedness and Asymptotic Behaviour of Solutions of Certain Nonlinear Differential Equations of the Third Order. *Kragujevac Journal of Mathematics, 35*(No 3), 431-445.

Bakare, E., Nwagwo, A., & Danso-Addo, E. (2014). Optimal Control Analysis of an SIR epidemic Model with Constant