

Klasifikasi Persamaan Diferensial (PD)

Definisi 1.

Suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu atau lebih variable bebas disebut persamaan diferensial.

Definisi 2.

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu variable bebas disebut persamaan diferensial biasa.

Definisi 3.

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variable tak bebas terhadap dua atau lebih variable bebas disebut persamaan diferensial parsial.

Definisi 4.

Orde PD adalah orde tertinggi turunan yang terdapat pada persamaan tersebut.

Definisi 5.

Derajat atau pangkat PD adalah pangkat dari orde turunan tertinggi pada PD tersebut.

Contoh 1.

Tuliskan apakah PD berikut merupakan PD biasa atau parsial. Kemudian tuliskan orde dan derajat masing-masing PD.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u}{\partial z^2} = 0. \tag{1.4}$$

Definisi 6.

PD biasa linear orde n dengan variable bebas x dan variable tak bebas y adalah PD yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \quad a_0 \neq 0.$$

Perhatikan bahwa, yang dimaksud "linear" meliputi (1) pangkat dari variable tak bebas y dan turunan-turunannya adalah satu, (2) tidak ada perkalian antara y dengan turunan-turunannya.

Definisi 7.

PD biasa nonlinear adalah PD biasa yang tak linear.

Contoh 2.

Tuliskan apakah PD berikut linear atau tidak

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x. \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0. \quad (1.9)$$

Latihan 1.

Classify each of the following differential equations as ordinary or partial differential equations; state the order of each equation; and determine whether the equation under consideration is linear or nonlinear.

1. $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x.$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x.$

3. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0.$

4. $x^2 dy + y^2 dx = 0.$

5. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0.$

6. $\frac{\partial^4u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + u = 0.$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + y \sin x = 0.$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + x \sin y = 0.$

9. $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t.$

10. $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}.$

Penyelesaian Persamaan Diferensial

Perhatikan PD orde satu berikut

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1.10)$$

Selanjutnya berikut ini merupakan penyelesaian PD (1.10)

$$f_1 = x^2$$

$$f_2 = x^2 + 1$$

$$f_3 = x^2 - 1$$

$$f_4 = x^2 + 2013$$

atau secara umum, penyelesaian PD (1.10) dapat ditulis $f = x^2 + C$, C konstanta real.

Contoh lain, apakah fungsi $f(x) = 3\sin x + 5\cos x$ merupakan penyelesaian dari PD

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 ??$$

Jadi, apa yang dimaksud dengan Penyelesaian Persamaan Diferensial????

Latihan 2.

- Show that each of the functions defined in Column I is a solution of the corresponding differential equation in Column II on every interval $a < x < b$ of the x axis.

I

II

(a) $f(x) = x + 3e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$$

(b) $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

(c) $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

(d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$(1+x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

- Show that $x^3 + 3xy^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation $2xy(dy/dx) + x^2 + y^2 = 0$ on the interval $0 < x < 1$.
 - Show that $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation $x(dy/dx) + y = x^3y^3$ on the interval $0 < x < \frac{5}{2}$.
- Show that every function f defined by

$$f(x) = (x^3 + c)e^{-3x},$$

where c is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}.$$

- Show that every function f defined by

$$f(x) = 2 + ce^{-2x^2},$$

where c is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

Buku: Ross. *Differential Equations*