ARTIKEL KAJIAN

FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA SISTEM PARAFERMI ORDE DUA

Oleh:

R. Yosi Aprian Sari, M.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA (UNY)
MEI, 2008

FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA SISTEM PARAFERMI ORDE DUA

Intisari

Berawal dari kaitan rekursi fungsi partisi kanonik lengkap untuk sistem parafermi orde dua yang telah diketahui, dijabarkan kaitan-kaitan rekursi untuk beberapa fungsi termodinamika sederhana bagi sistem parafermi orde dua.

Kaitan-kaitan rekursi tersebut kemudian digunakan untuk menghitung fungsi-fungsi termodinamika model sistem partikel identik dengan tingkat energi terbatas yang mirip osilator harmonik. Fungsi-fungsi termodinamika tersebut antara lain fungsi partisi kanonik lengkap *Z*, rerata jumlah partikel *N*, entropi *S*, energi internal *U*, dan panas jenis C_V . Secara teoretis, semua fungsi-fungsi termodinamika dari sistem parafermi orde dua memiliki kemiripan bentuk dengan sistem fermi (sistem parafermi orde 1).

Kata-kata kunci: parafermi, fungsi-fungsi termodinamika

THE THERMODYNAMICS FUNCTIONS OF

A PARAFERMION SYSTEM OF ORDER TWO

Abstract

Starting from a known recursion relation for the grand canonical partition function of parafermion system of order two, several recursion relations for simple thermodynamics functions of parafermion system of order two is derived.

These recursion relations are then being used to calculate the thermodynamics functions for a system of identical particles with harmonic oscillator-like energy levels. The thermodynamics functions i.e. the grand canonical partition function Z, number of particle N, entropy S, internal energy U, and specific heat C_V. The thermodynamics functions of the parafermion system of order two have similar pattern with fermionic (parafermion system of order 1), theoretically.

Keywords: parafermion, thermodynamics functions

BAB I

PENDAHULUAN

I. Latar Belakang Masalah

Di tinjau dari kaidah-kaidah mekanika kuantum, tidak ada keharusan bahwa statistik partikel-partikel yang ada harus memenuhi kaidah statistika Bose-Einstein maupun Fermi-Dirac. Tetapi kedua jenis statistik tersebut sudah dibuktikan kebenarannya melalui berbagai eksperimen. Partikel-partikel yang memenuhi statistik Bose-Einstein disebut partikel-partikel boson yang memiliki fungsi gelombang yang simetri terhadap pertukaran sebarang dua partikelnya. Contohnya antara lain foton, partikel alfa dan atom Helium. Sedangkan partikel-partikel fermion adalah partikel-partikel yang memenuhi statistik Fermi-Dirac dan prinsip larangan Pauli, yaitu partikel-partikel yang fungsi gelombangnya antisimetri terhadap pertukaran sebarang dua partikel. Contohnya antara lain proton, neutron dan elektron.

Banyak fisikawan berusaha membuat formulasi statistik yang lebih umum dari jenis statistik yang telah ada, baik dengan membuat jenis statistik partikel yang baru, maupun dengan menggeneralisasi statistik Bose dan Fermi. Beberapa jenis statistik partikel selain Bose dan Fermi yang telah diperkenalkan antara lain *null statistics*, "*doubly-infinite*" *statistics*, *orthofermi statistics, hubbard statistics* dan lain-lain [Mishra dan Rajasekaran, 1996]. Jenis statistik yang merupakan hasil generalisasi dari statistik yang telah ada antara lain *intermediate statistics*, *parastatistics*, *infinite statistics*, *paronic statistics*, *anyon statistics* dan lain-lain [Greenberg, 1993].

II. PERUMUSAN MASALAH

Perumusan masalah dalam kajian ini adalah mengetahui besaran-besaran termodinamika sederhana dari sistem parafermi orde dua yang akan dihitung dari fungsi partisi kanonik lengkap yaitu, Z, adalah rerata jumlah partikel (N), entropi (S), energi internal (U) dan panas jenis (C_V).

III. TUJUAN KAJIAN

Tujuan penulisan dalam kajian ini adalah mengetahui besaran-besaran termodinamika sederhana dari sistem parafermi orde dua yang akan dihitung dari fungsi partisi kanonik lengkap yaitu, Z, adalah rerata jumlah partikel (N), entropi (S), energi internal (U) dan panas jenis (C_V).

IV. TINJAUAN PUSTAKA

Parastatistik pertama kali diperkenalkan oleh Green (1953), merupakan generalisasi pertama yang konsisten dari bentuk kuantum statistik Bose-Einstein (yang disebut paraboson), dan statistik Fermi-Dirac (yang disebut parafermi). Parastatistik memenuhi relasi komutasi trilinear untuk operator kreasi dan anihilasi partikel, serta memenuhi kaidah dekomposisi gugus (*cluster decomposition*) [Hartle, dkk, 1970]. Karena hal ini, walaupun tidak ada indikasi bahwa partikel-partikel fundamental yang ada di alam saat ini memenuhi aturan parastatistik, tetapi teori ini tetap menarik untuk diselidiki lebih lanjut. Banyak fisikawan yang telah mencoba untuk mendapatkan besaran-besaran fisis yang terkait untuk sistem parastatistik, khususnya fungsi partisi kanonik lengkapnya (*Grand Canonical Partition Function*, GCPF). Dengan mengetahui GCPF akan dapat diketahui sifat-sifat termodinamika sistem parastatistik, sehingga dapat dijadikan dasar untuk mengklarifikasi apakah suatu sistem fisis memenuhi statistik ini atau tidak.

GCPF untuk sistem parafermi berorde *q*, $Z_{(q)}^{pF}$, telah diperoleh berupa rasio dua determinan. Fermion berkorespondensi dengan $q = 1$ [Chaturvedi dan Srinivasan, 1997; Chaturvedi, dkk, 1997; Nelson 2004].

$$Z_{(p)}^{pF}\left(x_1,\ldots,x_m\right) = \frac{\left|x_j^{m-i} - x_j^{m+p+i-1}\right|}{\left|x_j^{m-i} - x_j^{m+i-1}\right|} \tag{1}$$

Begitu juga GCPF untuk sistem paraboson orde *p*, $Z_{(p)}^{pB}$, yang juga berupa rasio dua determinan [Satriawan, 2002].

$$Z_{(p)}^{pB}\left(x_1,\ldots,x_m\right) = \frac{\left|P_{(p)}\left(x_1,\ldots,x_m\right)\right|}{\left|P_{(0)}\left(x_1,\ldots,x_m\right)\right|} \tag{2}$$

dengan $\left|P_{(p)}\left(x_1,\ldots,x_m\right)\right|$ adalah determinan suatu matriks. Boson berkorespondensi dengan $p = 1$.

Terdapat perumusan GCPF untuk model sistem paraboson orde *p* dan parafermi orde *q* dalam bentuk relasi rekursi. [Satriawan, 2003].

$$\begin{aligned} Z_{(p,q)}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right) = {} & \sum_{i=1}^{m} Z_{(p,q)}\left(x_1,\ldots,\not{x}_i,\ldots,x_m\right)\prod_{j\neq i}\frac{x_j}{\left(x_j - x_i\right)} \\ & + x_1\ldots x_m Z_{(p,q-1)}\left(x_1,\ldots,x_m\right) \end{aligned} \tag{3}$$

(untuk paraboson orde *p*, bentuk suku ke dua lenyap)

Dalam kajian ini fungsi termodinamika sederhana untuk sistem banyak partikel identik yang memenuhi aturan statistik parafermi orde dua dengan jumlah aras energi terbatas dan jarak antar energi yang sama. Sistem ini seperti sistem berpotensial osilator harmonik tetapi aras-aras energi tingginya diabaikan. Kaitan rekursi untuk GCPF ini akan digunakan sebagai dasar untuk menghitung besaran-besaran termodinamika, seperti jumlah total partikel *N*, entropi *S*, energi internal *U* dan panas jenis C_V .

BAB II

PEMBAHASAN

Fungsi-fungsi termodinamika dapat diturunkan lewat fungsi partisi kanonik lengkapnya. Untuk sistem yang ditinjau, kaitan rekursi untuk fungsi partisi kanonik lengkap pada pers. (1) adalah

$$Z_q(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \sum_{i=1}^{m} Z_q(x_1,\ldots,\not{x}_i,\ldots,x_m)\prod_{j\neq i}\frac{x_j}{(x_j - x_i)}, \qquad (4)$$
$$+\, x_1\ldots x_m Z_{q-1}(x_1,\ldots,x_m)$$

Di antara besaran-besaran termodinamika yang dapat diperoleh dari fungsi partisi kanonik lengkap, Z, adalah rerata jumlah partikel *N*, entropi *S*, energi internal *U* dan panas spesifik C_V, yaitu diperoleh melalui potensial kanonik lengkapnya, $\Omega(T,V,\mu) = -kT\ln Z(T,V,\mu)$ [Greiner, dkk, 1997; Landau dan Binder, 2005; Reichl, 1998]:

1. Rerata jumlah partikel $N(T,V,\mu)$

   Rerata jumlah partikel disimbolkan sebagai *N*, yang merupakan parameter ekstensif, yaitu parameter yang bergantung pada ukuran suatu sistem. Untuk sistem yang terbuka, jumlah partikelnya tidak tetap, tetapi rerata jumlah partikel dapat dapat diketahui melalui [Greiner, dkk (1997)]

   Rerata jumlah partikel dapat diturunkan sebagai berikut:

$$N(T,V,\mu) = -\left.\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right|_{T,V} = \frac{T}{Z}\left.\frac{\partial Z(x_1,\ldots,x_m)}{\partial\mu}\right|_{T} \qquad (5)$$

   bentuk $\partial Z/\partial\mu$ diperoleh dengan mendiferensialkan kaitan rekursi pada pers. (4) terhadap μ pada *T* konstan, yaitu diperoleh

2. Entropi $S(T,V,\mu)$:

Entropi *S*, merupakan parameter ekstensif, yaitu parameter termodinamika yang secara langsung sebanding dengan ukuran suatu sistem. Dalam hukum kedua termodinamika, entropi memiliki sifat: selama sebarang proses adiabatik dari keadaan setimbang α ke keadaan setimbang β, entropi tidak mengalami penurunan, yaitu $Q_{\alpha \to \beta} = 0 \Rightarrow S(\beta) \geq S(\alpha)$. Entropi suatu sistem ensembel makrokanonik dapat diperoleh melalui [Greiner, dkk (1997)]

$$S(T,V,\mu) = -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right|_{\mu,V} = \ln Z - \left.\frac{1}{ZT}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right|_{\mu} \tag{6}$$

3. Energi internal *U*:

Untuk sistem yang terbuka (ensembel makrokanonik), energi sistem tidak tetap tetapi berfluktuasi disekitar suatu nilai rerata yang dicapai ketika sistem berada dalam keadaan setimbang termal dengan lingkungannya. Rerata energi internal sistem dapat diperoleh dari [Greiner, dkk (1997)]

$$U(T,V,\mu) = -\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_{z,V} = -\left.\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right|_{z} \tag{7}$$

dengan $z = \exp\{\beta\mu\}$. Kedua besaran-besaran termodinamika di atas, yaitu *S* dan *U* mengandung fungsi partisi kanonik lengkap, $Z(x_1,\ldots,x_m)$, dan diferensial orde pertama terhadap β, yaitu $\partial Z/\partial \beta$.

4. Panas spesifik

Panas jenis pada volume konstan diperoleh sebagai

$$C_V(T) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{N,V}. \tag{8}$$

Tetapi untuk suatu sistem yang terbuka (ensembel makrokanonik), jumlah partikelnya selau berfluktuasi, sehingga nilai N tidak pernah tetap. Akan tetapi bentuk lain yang dapat dilakukan adalah [Greiner, dkk (1997)]

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{z,V} - \frac{1}{T}\left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{V,T}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial N}\right|_{T,V}\right)^2 . \tag{9}$$

dan diketahui bahwa

$$\left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \frac{1}{kT}\sigma_N^2 \tag{10}$$

dengan σ_N^2 adalah fluktuasi dari jumlah partikel yang sebanding dengan $1/\sqrt{N}$ sehingga untuk jumlah partikel $N \to \infty$ maka $\sigma_N^2 \to 0$. Dengan demikian dapat diketahui nilai C_V sebagai

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,z} . \tag{11}$$

BAB III

PENUTUP

I. Simpulan

1. Secara umum, fungsi partisi kanonik lengkap, Z, dan fungsi-fungsi termodinamika lainnya seperti *N*, *S*, *U* dan C_V terkait dengan potensial kimia μ dan temperatur, *T*.
2. Fungsi partisi kanonik lengkap, Z, dan fungsi-fungsi termodinamika lainnya seperti *N*, *S*, *U* dan C_V untuk sistem parafermi orde dua secara teori memiliki kemiripan dengan dengan sistem fermion (parafermi orde 1).

II. Saran

Kajian yang melibatkan sistem yang lebih realistis perlu dilakukan untuk membandingkan dengan sistem statistik fermion yang dapat diakses eksperimen atau komputasi.

REFERENSI

Chaturvedi, S and V. Srinivasan. (1997). *Grand Canonical Partition Functions for Multi Level Parafermi Systems of Any Order*, Phys. Lett. **A-224**, 249-252

Chaturvedi, S., R. H. McKenzie, P. K. Panigrahi and V. Srinivasan. (1997). *Equivalence of The Grand Canonical Partition Functions of Particles with Different Statistics*, Mod. Phys. Lett. **A-12**, 1095-1099

Green, H. S. (1953). *A Generalized Method of Quantization*, Phys. Rev. **90**, 270

Greenberg, O. W. (1993). *Quons, an Interpolation Between Bose and Fermi Oscillators*, arXiv:cond-mat/9301002v1

Greiner, W., L. Neise, and H. Stöcker. (1997). *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Heidelberg: Springer-Verlag

Hartle, J. B., R. H. Stolt and J. R. Taylor. (1970). *Paraparticles of Infinite Order*, Phys. Rev. **D-2**, 1759-1761

Landau, D. P., and K. Binder.(2005). *A Guide to Monte Carlo in Statistical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press

Nelson, C. A. (2004). *Pairing Of Parafermions Of Order 2: Seniority Model*. J.Phys. A37 2497-2508

Reichl, L. E. (1998). *A Modem Course in Statistical Physics*. New York: John Wiley & Sons

Satriawan, M. (2004). *Grand Canonical Partition Function for Parastatistical Systems*. Physics Journal IPS Proceeding Supplement C8 0515

Satriawan, M. (2002). *Generalized Parastatistics Systems*; Dissertation, University of Illinois at Chicago