

## ANALISIS KEADAAN DINAMIK SISTEM LORENZ

Dian Trendi Dwi P. dan Kus Prihantoso Kurniawan

Program Studi Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

### Abstrak

Sistem persamaan Lorenz adalah sebuah sistem persamaan diferensial yang menggambarkan keadaan atmosfer bumi. Sistem Lorenz ini ditemukan atau dikemukakan oleh Edward Lorenz pada tahun 1963. Analisis terhadap sistem Lorenz dilakukan dengan menggerakkan parameter  $\rho$  (perbedaan temperatur antara bagian atas dan bagian bawah lapisan atmosfer bumi). Dengan menggunakan teori *Manifold Center*, dapat ditunjukkan bahwa pada  $\rho = 1$ , sistem Lorenz mengalami bifurkasi *pitchfork*.

Kata kunci: sistem Lorenz, titik *ekuilibrium*, bifurkasi *pitchfork*.

### PENDAHULUAN

Salah satu contoh dari sistem dinamik *non-linear* adalah sistem Lorenz atau biasa dikenal dengan persamaan Lorenz. Sistem Lorenz dinamai sesuai dengan nama penemunya, yaitu Edward Lorentz pada tahun 1963. Sistem ini merupakan sebuah model matematika untuk kondisi atmosfer. Bayangkan apabila sebuah lapisan udara dipanaskan dari bawah dan di atasnya didinginkan dengan kedua tepinya dijaga pada temperatur tetap. Dalam lapisan tersebut udara panas akan muncul dan udara dingin akan hilang. Hal ini merupakan gambaran dari atmosfer Bumi yang paling sederhana. Bagian bawahnya dipanaskan oleh Bumi dan pada bagian atasnya didinginkan oleh angkasa luar. Sistem Lorenz seperti dinyatakan oleh Edward Lorentz (Rika, Ary, Asep: 2007) mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}\quad (1)$$

Keadaan atmosfer dalam model ini dapat digambarkan secara utuh dengan tiga buah variabel bergantung waktu yaitu: (1) laju konveksi  $x$ , (2) distribusi temperatur horizontal  $y$ , dan (3) distribusi temperatur vertikal  $z$ , dengan tiga parameter yang menjelaskan karakter dari model tersebut yaitu:  $\sigma > 0$  (rasio viskositas terhadap konduktivitas termal),  $\rho > 0$  (perbedaan temperatur antara bagian atas dan bagian bawah lapisan), dan  $\beta > 0$  (perbandingan luas dan ketebalan lapisan).

Dalam makalah ini hanya akan dilihat pengaruh dari perubahan nilai parameter  $\rho$ , oleh karena itu nilai  $\sigma$  dan  $\beta$  ditetapkan sebagai sebuah konstanta positif. Menurut Rika, et.al, 2007, nilai dari konstanta  $\sigma$  adalah 10 dan  $\beta$  adalah 8/3. Sehingga persamaan (1) menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -10x + 10y \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}\quad (2)$$

Selanjutnya untuk melihat apakah dalam sistem tersebut terdapat bifurkasi atau tidak, akan dilihat pengaruh dari nilai parameter  $\rho$  terhadap kestabilan titik ekuilibrium pada sistem persamaan tersebut.

### TITIK-TITIK EKUILIBRIUM PERSAMAAN LORENZ

Titik ekuilibrium persamaan (2) diperoleh saat:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

Sehingga titik-titik ekuilibrium persamaan (2) adalah:

$$\bar{u}_1 = (0, 0, 0),$$

$$\bar{u}_2 = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}(\rho - 1), \sqrt{\frac{8}{3}}(\rho - 1), \rho - 1\right), \text{ dan}$$