

TUGAS II KALKULUS LANJUT

Bilangan π merupakan bilangan irasional. Bilangan ini mempunyai banyak tak hingga digit desimal. Kebanyakan dari kita hanya tahu sampai digit ke dua setelah koma (3,14). Sebenarnya, pada tahun 1706, Machin sudah dapat menghitung hingga digit desimal yang ke 100. Munculnya komputer sangat membantu untuk menghitung nilai π dengan akurasi yang sangat tinggi. Pada tahun 1995, Jonathan, Peter Borwein, dan Yasumada Kanada berhasil menghitung π hingga digit desimal ke 4.294.967.286.

Untuk tugas kali ini, kita tidak menggunakan komputer, namun kita akan mencoba menelusuri metode yang di gunakan oleh Machin untuk menentukan nilai π .

1. Tunjukkan bahwa untuk $xy \neq -1$ berlaku

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

jika ruas kiri terletak antara $-\pi/2$ dan $\pi/2$.

2. Tunjukkan bahwa

$$\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

3. Buktikan rumus yang ditemukan oleh John Machin (1680-1751) berikut

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

4. Gunakan deret Maclaurin dari fungsi \arctan untuk menunjukkan bahwa

$$0,197395560 < \arctan \frac{1}{5} < 0,197395562$$

5. Tunjukkan bahwa

$$0,004184075 < \arctan \frac{1}{239} < 0,004184077$$

6. Tunjukkan bahwa π hingga digit desimal ke 7 mempunyai nilai

$$\pi \approx 3,1415927$$