

Teorema Nilai Rata-rata

Kus Prihantoso Krisnawan

April 27, 2012

Yogyakarta

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Masih ingatkah anda tentang nilai rata-rata dari sekmpulan bilangan? Berapakah nilai rata-rata dari sebanyak n bilangan y_1, y_2, \dots, y_n ?

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Masih ingatkah anda tentang nilai rata-rata dari sekmpulan bilangan? Berapakah nilai rata-rata dari sebanyak n bilangan y_1, y_2, \dots, y_n ?

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \quad (1)$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Masih ingatkah anda tentang nilai rata-rata dari sekumpulan bilangan? Berapakah nilai rata-rata dari sebanyak n bilangan y_1, y_2, \dots, y_n ?

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (1)$$

Bagaimana menghitung nilai rata-rata dari suatu fungsi f pada selang $[a, b]$?

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Misalkan selang $[a, b]$ dipartisi oleh P menjadi n bagian, yaitu $P : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Misalkan selang $[a, b]$ dipartisi oleh P menjadi n bagian, yaitu $P : a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ dan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ maka nilai rata-rata dari $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ adalah

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Misalkan selang $[a, b]$ dipartisi oleh P menjadi n bagian, yaitu $P : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ dan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ maka nilai rata-rata dari $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ adalah

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Misalkan selang $[a, b]$ dipartisi oleh P menjadi n bagian, yaitu $P : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ dan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ maka nilai rata-rata dari $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)(b-a)}{n(b-a)} \end{aligned}$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Misalkan selang $[a, b]$ dipartisi oleh P menjadi n bagian, yaitu $P : a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ dan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ maka nilai rata-rata dari $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)(b-a)}{n(b-a)} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \end{aligned}$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Jika selang partisi dibuat kecil sekali ($\Delta x \rightarrow 0$) maka nilai n menjadi sangat besar ($n \rightarrow \infty$) sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Jika selang partisi dibuat kecil sekali ($\Delta x \rightarrow 0$) maka nilai n menjadi sangat besar ($n \rightarrow \infty$) sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Nilai Rata-rata Suatu Fungsi

Jika selang partisi dibuat kecil sekali ($\Delta x \rightarrow 0$) maka nilai n menjadi sangat besar ($n \rightarrow \infty$) sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Dengan demikian, jika fungsi f dapat diintegrasikan pada selang $[a, b]$ maka rata-rata dari fungsi f pada selang $[a, b]$ adalah

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 1: Jika fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ maka ada nilai c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 1: Jika fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ maka ada nilai c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Teorema 2: Jika f merupakan fungsi genap maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (4)$$

Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 1: Jika fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ maka ada nilai c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Teorema 2: Jika f merupakan fungsi genap maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (4)$$

Jika f merupakan fungsi ganjil maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (5)$$

Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 1: Jika fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ maka ada nilai c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Teorema 2: Jika f merupakan fungsi genap maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (4)$$

Jika f merupakan fungsi ganjil maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (5)$$

Teorema 3: Jika f merupakan fungsi periodik dengan periode p maka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

Latihan Soal

Tentukan nilai rata-rata dari fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$; $[0, 3]$.

3. $f(x) = 2 + |x|$; $[-2, 1]$.

5. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi]$.

7. $f(x) = x \cos x^2$; $[0, \sqrt{\pi}]$.

9. $f(y) = y(1 + y^2)^3$; $[1, 2]$.

11. $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+16}}$; $[0, 2]$.

4. $f(x) = 2 + |x|$; $[-3, 2]$.

6. $f(x) = \sin x$; $[0, \pi]$.

8. $f(x) = \sin^2 x \cos x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$.

10. $f(x) = \tan x \sec^2 x$; $[0, \frac{\pi}{4}]$.

12. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Latihan Soal

Tentukan nilai rata-rata dari fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$; $[0, 3]$.

2. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+16}}$; $[0, 2]$.

3. $f(x) = 2 + |x|$; $[-2, 1]$.

4. $f(x) = 2 + |x|$; $[-3, 2]$.

5. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi]$.

6. $f(x) = \sin x$; $[0, \pi]$.

7. $f(x) = x \cos x^2$; $[0, \sqrt{\pi}]$.

8. $f(x) = \sin^2 x \cos x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. $f(y) = y(1 + y^2)^3$; $[1, 2]$.

10. $f(x) = \tan x \sec^2 x$; $[0, \frac{\pi}{4}]$.

11. $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

12. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Tentukan nilai c yang memenuhi teorema nilai rata-rata untuk intrgral pada fungsi-fungsi berikut

13. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $[0, 3]$.

14. $f(x) = x^2$; $[-1, 1]$.

15. $f(x) = 1 - x^2$; $[-4, 3]$.

16. $f(x) = x(1 - x)$; $[0, 1]$.

17. $f(x) = |x|$; $[0, 2]$.

18. $f(x) = |x|$; $[-2, 2]$.

19. $f(x) = \sin x$; $[-\pi, \pi]$.

20. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi]$.

21. $f(x) = x^2 - x$; $[0, 2]$.

22. $f(x) = x^3$; $[0, 2]$.

23. $f(x) = ax + b$; $[1, 4]$.

24. $f(x) = ay^2$; $[0, b]$