

FUNGSI DUA VARIABEL (TURUNAN PARSIAL)

Kus Prihantoso Krisnawan

January 2, 2012

Yogyakarta

Fungsi 2 Variabel

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Contoh fungsi 2 variabel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = x^2y + 3y^3$$

$$f(x, y) = \cos x \sin y$$

$$f(x, y) = x^2 \sin(xy^2)$$

Fungsi 2 Variabel

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Contoh fungsi 2 variabel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = \cos x \sin y$$

$$f(x, y) = x^2y + 3y^3$$

$$f(x, y) = x^2 \sin(xy^2)$$

Sebelumnya telah dibicarakan mengenai fungsi satu variabel dan turunannya.

Ingat bahwa definisi turunan fungsi f pada titik $x = a$ adalah

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

jika limitnya ada.

Lalu bagaimana dengan fungsi yang mempunyai variabel lebih dari 1?

Diferensial Partial

Misalkan f adalah sebuah fungsi dua variabel x dan y . Jika y dianggap konstan ($y = y_0$) maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dalam variabel x . Turunan f terhadap x (turunan parsial f terhadap x) didefinisikan

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Diferensial Partial

Misalkan f adalah sebuah fungsi dua variabel x dan y . Jika y dianggap konstan ($y = y_0$) maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dalam variabel x . Turunan f terhadap x (turunan parsial f terhadap x) didefinisikan

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Di lain pihak, jika x dianggap konstan maka turunan f terhadap y (turunan parsial f terhadap y) didefinisikan

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (3)$$

Diferensial Partial

Misalkan f adalah sebuah fungsi dua variabel x dan y . Jika y dianggap konstan ($y = y_0$) maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dalam variabel x . Turunan f terhadap x (turunan parsial f terhadap x) didefinisikan

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Di lain pihak, jika x dianggap konstan maka turunan f terhadap y (turunan parsial f terhadap y) didefinisikan

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (3)$$

Definisi tersebut mirip dengan definisi dari turunan satu variabel, dengan menganggap salah satu variabel sebagai konstanta. Sehingga aturan-aturan dalam turunan satu variabel dapat diterapkan di sini.

Berikut ini diberikan notasi alternatif untuk turunan parsial, jika $z = f(x, y)$

$$f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$
$$f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Lambang ∂ (dibaca do) merupakan lambang turunan parsial.

Contoh 1

Tentukan $f_x(1, 2)$ dan $f_y(1, 2)$ jika $f(x, y) = x^2y + 3y^3$.

Jawab:

Contoh 1

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Tentukan $f_x(1, 2)$ dan $f_y(1, 2)$ jika $f(x, y) = x^2y + 3y^3$.

Jawab:

Untuk menentukan $f_x(x, y)$, kita harus memandang y sebagai konstanta. Dengan demikian, turunan fungsi $f(x, y)$ terhadap x adalah

$$f_x(x, y) = 2xy + 0$$

sehingga $f_x(1, 2) = 4$.

Contoh 1

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Tentukan $f_x(1, 2)$ dan $f_y(1, 2)$ jika $f(x, y) = x^2y + 3y^3$.

Jawab:

Untuk menentukan $f_x(x, y)$, kita harus memandang y sebagai konstanta. Dengan demikian, turunan fungsi $f(x, y)$ terhadap x adalah

$$f_x(x, y) = 2xy + 0$$

sehingga $f_x(1, 2) = 4$.

Sedangkan turunan fungsi $f(x, y)$ terhadap y adalah

$$f_y(x, y) = x^2 + 9y^2$$

sehingga $f_y(1, 2) = 1 + 9 \cdot 4 = 37$

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, tentukan z_x dan z_y .

Jawab:

Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, tentukan z_x dan z_y .

Jawab:

Turunan fungsi $z = x^2 \sin(xy^2)$ terhadap x adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial x^2}{\partial x} \sin(xy^2) + x^2 \frac{\partial \sin(xy^2)}{\partial x} \\ &= 2x \sin(xy^2) + x^2 y^2 \cos(xy^2)\end{aligned}$$

Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, tentukan z_x dan z_y .

Jawab:

Turunan fungsi $z = x^2 \sin(xy^2)$ terhadap x adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial x^2}{\partial x} \sin(xy^2) + x^2 \frac{\partial \sin(xy^2)}{\partial x} \\ &= 2x \sin(xy^2) + x^2 y^2 \cos(xy^2)\end{aligned}$$

Sedangkan turunan fungsi $z = x^2 \sin(xy^2)$ terhadap y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y \cos(xy^2)$$

Turunan Parsial Orde Tinggi

Turunan parsial kedua dari fungsi $f(x, y)$ adalah

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Turunan Parsial Orde Tinggi

Turunan parsial kedua dari fungsi $f(x, y)$ adalah

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Sedangkan turunan parsial ketiga dari fungsi $f(x, y)$ adalah f_{xxx} , f_{xxy} , f_{xyx} , f_{yxx} , f_{xyy} , f_{yxy} , f_{yyx} , dan f_{yyy} .

Untuk f_{yxx} didefinisikan

$$f_{yxx} = (f_y)_{xx} = ((f_y)_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial y}$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

Fungsi

Diferensial
Partial

Dif-Par

Notasi

Contoh 1

Contoh 2

Orde Tinggi

Multi

Contoh

Latihan

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

$$T_{zw}(w, x, y, z) = (T_z)_w = (e^{w^2+x^2+y^2})_w = 2we^{w^2+x^2+y^2}$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

$$T_{zw}(w, x, y, z) = (T_z)_w = (e^{w^2+x^2+y^2})_w = 2we^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{xw}(w, x, y, z) = (2xze^{w^2+x^2+y^2})_w = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

$$T_{zw}(w, x, y, z) = (T_z)_w = (e^{w^2+x^2+y^2})_w = 2we^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{xw}(w, x, y, z) = (2xze^{w^2+x^2+y^2})_w = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{yyz}(w, x, y, z) = ((T_y)_y)_z = ((2yze^{w^2+x^2+y^2})_y)_z$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

$$T_{zw}(w, x, y, z) = (T_z)_w = (e^{w^2+x^2+y^2})_w = 2we^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{xw}(w, x, y, z) = (2xze^{w^2+x^2+y^2})_w = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} T_{yyz}(w, x, y, z) &= ((T_y)_y)_z = ((2yze^{w^2+x^2+y^2})_y)_z \\ &= (2ze^{w^2+x^2+y^2} + 4y^2ze^{w^2+x^2+y^2})_z \end{aligned}$$

Fungsi Lebih dari 2 Variabel

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x , f_z , f_{zy} dan f_{xyz}

Jawab:

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y = (2y + 3x)_y = 2$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = ((f_x)_y)_z = ((y + 3z)_y)_z = (1)_z = 0$$

Tentukan T_{zw} , T_{xw} , dan T_{yyz} jika $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$

Jawab:

$$T_{zw}(w, x, y, z) = (T_z)_w = (e^{w^2+x^2+y^2})_w = 2we^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_{xw}(w, x, y, z) = (2xze^{w^2+x^2+y^2})_w = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} T_{yyz}(w, x, y, z) &= ((T_y)_y)_z = ((2yze^{w^2+x^2+y^2})_y)_z \\ &= (2ze^{w^2+x^2+y^2} + 4y^2ze^{w^2+x^2+y^2})_z \\ &= 2e^{w^2+x^2+y^2} + 4y^2e^{w^2+x^2+y^2} \end{aligned}$$

- 1 Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi berikut.

a $f(x, y) = (2x - y)^4$

b $f(x, y) = (4x - y^2)^{\frac{3}{2}}$

c $f(x, y) = e^x \cos y$

d $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$

e $f(s, t) = \ln(s^2 - t^2)$

f $f(w, z) = w \sin^{-1}\left(\frac{w}{z}\right)$

g $f(x, y) = y \cos(x^2 + y^2)$

h $f(x, y, z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$

- 2 Tentukan semua turunan parsial kedua dari soal no 1 diatas.