

# DERIVATIVE (continued) (TURUNAN)

Kus Prihantoso Krisnawan

November 25<sup>rd</sup>, 2011

Yogyakarta

# Aturan Turunan Trigonometri

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

# Aturan Turunan Trigonometri

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

# Aturan Turunan Trigonometri

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

## Contoh

### Contoh

Diketahui  $f(x) = x^2 + 6x$ ,  $g(x) = \tan x$ , dan  $h(x) = \cos x$ .

Tentukan: a)  $(f(x) + g(x))'$ , b)  $(f(x)h(x))'$ , dan c)  $\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)}$

## Contoh

### Contoh

Diketahui  $f(x) = x^2 + 6x$ ,  $g(x) = \tan x$ , dan  $h(x) = \cos x$ .

Tentukan: a)  $(f(x) + g(x))'$ , b)  $(f(x)h(x))'$ , dan c)  $\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)}$

### Jawab:

Karena  $f'(x) = 2x + 6$  dan  $g'(x) = \sec^2 x$ , dan  $h'(x) = -\sin x$ , maka

## Contoh

### Contoh

Diketahui  $f(x) = x^2 + 6x$ ,  $g(x) = \tan x$ , dan  $h(x) = \cos x$ .

Tentukan: a)  $(f(x) + g(x))'$ , b)  $(f(x)h(x))'$ , dan c)  $\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)}$

### Jawab:

Karena  $f'(x) = 2x + 6$  dan  $g'(x) = \sec^2 x$ , dan  $h'(x) = -\sin x$ , maka

$$\text{a) } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 2x + 6 + \sec^2 x$$

## Contoh

### Contoh

Diketahui  $f(x) = x^2 + 6x$ ,  $g(x) = \tan x$ , dan  $h(x) = \cos x$ .

Tentukan: a)  $(f(x) + g(x))'$ , b)  $(f(x)h(x))'$ , dan c)  $\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)}$

### Jawab:

Karena  $f'(x) = 2x + 6$  dan  $g'(x) = \sec^2 x$ , dan  $h'(x) = -\sin x$ , maka

$$\text{a) } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 2x + 6 + \sec^2 x$$

$$\text{b) } (fh)'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = (2x + 6)\cos x - (x^2 + 6x)\sin x$$



## Contoh

### Contoh

Diketahui  $f(x) = x^2 + 6x$ ,  $g(x) = \tan x$ , dan  $h(x) = \cos x$ .  
Tentukan: a)  $(f(x) + g(x))'$ , b)  $(f(x)h(x))'$ , dan c)  $\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)}$

### Jawab:

Karena  $f'(x) = 2x + 6$  dan  $g'(x) = \sec^2 x$ , dan  $h'(x) = -\sin x$ , maka

$$\text{a) } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 2x + 6 + \sec^2 x$$

$$\text{b) } (fh)'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = (2x + 6)\cos x - (x^2 + 6x)\sin x$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} = \frac{\sec^2 x \cos x + \tan x \sin x}{\cos^2 x}$$

## Latihan

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut

a.  $f(x) = x^2 \sin x$

b.  $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

c.  $h(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

d.  $f(x) = \sin x \cos x$

e.  $g(x) = \frac{\cot x}{\sin x}$

f.  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$

g.  $f(s) = \frac{1 + \sec s}{\csc s}$

h.  $g(t) = \frac{\sin t + \cos t}{\cot t}$

i.  $h(s) = \frac{s^2 \cos s}{\tan s}$

j.  $f(t) = \frac{t \cos t + \cot t}{\sec t}$

## Aturan Rantai (*chain rule*)

Bagaimana menurunkan fungsi  $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{75}$ ?  
Apakah kita hitung hasil perpangkatannya dulu?

## Aturan Rantai (*chain rule*)

Bagaimana menurunkan fungsi  $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{75}$ ?

Apakah kita hitung hasil perpangkatannya dulu?

Cara yang lebih mudah adalah menggunakan aturan rantai

## Aturan Rantai (*chain rule*)

Bagaimana menurunkan fungsi  $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{75}$ ?

Apakah kita hitung hasil perpangkatannya dulu?

Cara yang lebih mudah adalah menggunakan aturan rantai

### Teorema

*Jika  $u = g(x)$  dan  $y = f(u)$  masing-masing terdiferensial pada  $x$  dan  $g(x)$  maka fungsi komposisi  $f \circ g$ , didefinisikan sebagai  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  terdiferensial di  $x$  dan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (1)$$

*atau*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (2)$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan turunan dari fungsi  $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{75}$ .

## Contoh

### Contoh

Tentukan turunan dari fungsi  $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{75}$ .

**Jawab:**

Misalkan  $y = u^{75}$  dan  $u = x^2 + 5x - 8$  maka  $\frac{dy}{du} = 75u^{74}$  dan  $\frac{du}{dx} = 2x + 5$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \\ &= 75u^{74}(2x + 5) \\ &= 75(x^2 + 5x - 8)^{74}(2x + 5) \end{aligned}$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan turunan dari fungsi  $f(t) = \sin(\cos t + 2t)^7$ .



## Contoh

### Contoh

Tentukan turunan dari fungsi  $f(t) = \sin(\cos t + 2t)^7$ .

**Jawab:**

Misalkan  $y = \sin u$ ,  $u = v^7$ , dan  $v = \cos t + 2t$  maka  
 $y' = \cos u$ ,  $u' = 7v^6$ , dan  $v' = -\sin t + 2$  sehingga

$$f'(t) = \cos(\cos t + 2t)^7 \cdot 7(\cos t + 2t)^6 \cdot (-\sin t + 2)$$

## Latihan

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut

a.  $f(x) = (7x^2 + 5x - 2)^8$

b.  $g(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x + 2)^9}$

c.  $h(x) = \cos(3x^2 - 2x + 1)$

d.  $f(x) = \sin^8(x^3 + 5x)$

e.  $g(x) = \sec^3(x - 2)^5$

f.  $h(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5$

g.  $f(x) = \tan^3\left(\frac{1+x}{x^2}\right)$

h.  $g(x) = \csc^3\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)^2$

i.  $h(x) = (2 - 3x^2)^4(x^7 + 3)^5$

j.  $f(x) = \frac{(2x^2-3)^3}{(4x+7)^5}$

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?  
Kita tidak dapat mengubah persamaan ini menjadi  $y = f(x)$ .

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?  
Kita tidak dapat mengubah persamaan ini menjadi  $y = f(x)$ .  
Perhatikan bahwa

$$\frac{d(x - 3x^3)}{dx} = \frac{d(x^2 + y^4 - 2y)}{dx}$$

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?  
Kita tidak dapat mengubah persamaan ini menjadi  $y = f(x)$ .  
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{d(x - 3x^3)}{dx} &= \frac{d(x^2 + y^4 - 2y)}{dx} \\ 1 - 9x^2 &= 2x + \frac{d(y^4)}{dx} - \frac{d(2y)}{dx}\end{aligned}$$

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?  
Kita tidak dapat mengubah persamaan ini menjadi  $y = f(x)$ .  
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{d(x - 3x^3)}{dx} &= \frac{d(x^2 + y^4 - 2y)}{dx} \\ 1 - 9x^2 &= 2x + \frac{d(y^4)}{dx} - \frac{d(2y)}{dx} \\ 1 - 9x^2 &= 2x + 4y^3 \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

## Contoh

Bagaimana menentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x - 3x^3 = x^2 + y^4 - 2y$ ?  
Kita tidak dapat mengubah persamaan ini menjadi  $y = f(x)$ .  
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{d(x - 3x^3)}{dx} &= \frac{d(x^2 + y^4 - 2y)}{dx} \\ 1 - 9x^2 &= 2x + \frac{d(y^4)}{dx} - \frac{d(2y)}{dx} \\ 1 - 9x^2 &= 2x + 4y^3 \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} \\ 1 - 2x - 9x^2 &= (4y^3 - 2) \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1 - 2x - 9x^2}{4y^3 - 2}\end{aligned}$$



# Contoh

## Contoh

Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $\sin(x + y) = \cos(y^2 + 1 + x^2)$ .

# Contoh

## Contoh

Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $\sin(x + y) = \cos(y^2 + 1 + x^2)$ .

**Jawab:**

$$\frac{d \sin(x + y)}{dx} = \frac{d \cos(y^2 + 1 + x^2)}{dx}$$

## Contoh

### Contoh

Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $\sin(x + y) = \cos(y^2 + 1 + x^2)$ .

**Jawab:**

$$\begin{aligned}\frac{d \sin(x + y)}{dx} &= \frac{d \cos(y^2 + 1 + x^2)}{dx} \\ \cos(x + y) \frac{d(x + y)}{dx} &= -\sin(y^2 + 1 + x^2) \frac{d(y^2 + 1 + x^2)}{dx}\end{aligned}$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $\sin(x + y) = \cos(y^2 + 1 + x^2)$ .

**Jawab:**

$$\begin{aligned} \frac{d \sin(x + y)}{dx} &= \frac{d \cos(y^2 + 1 + x^2)}{dx} \\ \cos(x + y) \frac{d(x + y)}{dx} &= -\sin(y^2 + 1 + x^2) \frac{d(y^2 + 1 + x^2)}{dx} \\ \cos(x + y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) &= -\sin(y^2 + 1 + x^2) \left(2y \frac{dy}{dx} + 2x\right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos(x + y) - 2x \sin(y^2 + 1 + x^2)}{2y \sin(y^2 + 1 + x^2) + \cos(x + y)} \end{aligned}$$

## Latihan

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut

a.  $y^2 - x^2 = 1$

b.  $xy = 1$

c.  $x^2 + 2xy^2 + 1 = 0$

d.  $x^2y + y^2x = 1$

e.  $\sqrt{xy} + 2y = y^2 + xy^3$

f.  $x^2y^2 + 4xy = 12y$

g.  $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sin y = x$

h.  $xy + \sin(xy) = 0$

i.  $\cos(xy^2) = y^2 + x$

j.  $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - 2y = 2$

## Tugas (Kumpul tanggal 2 Desember 2011)

1. Tentukan semua titik pada kurva  $y = 9 \sin x \cos x$  yang mempunyai garis singgung mendatar.
2. Tentukan persamaan garis singgung terhadap  $y = (x^2 + x - 1)^{-3}$  pada titik  $(1, 1)$ .
3. Sebuah kota terjangkit wabah *Asian flu*. Pihak yang berwenang mengestimasi bahwa  $t$  hari setelah mulai terjangkit wabah, banyaknya orang yang terkena flu adalah  $p(t) = 120t^2 - 2t^3$  untuk  $0 \leq t \leq 40$ . Pada kecepatan berapa flu menyebar saat  $t = 10$ ,  $t = 20$ , dan  $t = 40$ ?
4. Sebuah pesawat luar angkasa bergerak dari kiri ke kanan sepanjang kurva  $y = x^2$ . Jika mesin dimatikan maka pesawat akan bergerak sepanjang garis singgung pada titik saat mesin dimatikan. Pada titik mana seharusnya mesin dimatikan agar pesawat bergerak melalui titik  $(4, 15)$ ?