

Modul
PELATIHAN “GUIDE” MATLAB UNTUK PEMBUATAN
ANTARMUKA PEMBELAJARAN PERSAMAAN MATEMATIKA
DAN GRAFIKNYA

Pengenalan Program Matlab Menggunakan
Operasi-Operasi Matriks



Oleh :

Nur Hadi Waryanto, S.Si

Laboratorium Komputer
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2007

MATRIKS

A. Mendefinisikan Matriks

Matriks adalah kelompok bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang yang terdiri atas baris-baris atau kolom-kolom. Misalkan matriks A terdiri atas m baris dan n kolom, maka matriks A dikatakan berordo $m \times n$ yang ditulis $A_{m \times n}$. Banyaknya elemen matriks A adalah $(m \times n)$ buah dengan elemen-elemen matriks dilambangkan a_{ij} untuk $i = 1 \dots m$ dan $j = 1 \dots n$.

Bentuk umum matriks A adalah

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sebuah matriks dalam Matlab didefinisikan dengan beberapa cara, yaitu :

1. Menuliskan semua elemen matriks dalam satu baris dengan dipisahkan tanda titik koma (;)

```
>> A=[1 2 4;2 4 5;2 1 2]
A =
```

```
1 2 4
2 4 5
2 1 2
```

2. Menuliskan semua elemen matriks per barisnya

```
>> A=[1 2 4
      2 4 5
      2 1 2]
A =
```

```
1 2 4
2 4 5
2 1 2
```

3. Menuliskan/mendefinisikan terlebih dahulu elemen matriks per baris matriks

```
>> a1=[1 2 4]
a1 =
```

```
1 2 4
```

```

>> a2=[2 4 5]
a2 =
     2     4     5

>> a3=[2 1 2]
a3 =
     2     1     2

>> A=[a1;a2;a3]
A =
     1     2     4
     2     4     5
     2     1     2

```

Latihan

Definisikan matriks dibawah ini dalam Matlab

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. D = (0 \ 0 \ 0 \ -9)$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -8 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Merujuk Elemen Matriks

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 8 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

1. Merujuk elemen matriks dalam baris tertentu

- Elemen baris pertama

```

>> A(1,:)
ans =
     2     0    -9

```

- Elemen baris kedua

```

>> A(2,:)

```

```
ans =  
8 9 0
```

- Elemen baris ke-n

```
>> A(n,:)
```

2. Merujuk elemen matriks dalam kolom tertentu

- Elemen kolom pertama

```
>> A(:,1)
```

```
ans =  
2  
8  
0
```

- Elemen kolom kedua

```
>> A(:,2)
```

```
ans =  
0  
9  
8
```

- Elemen kolom ke-n

```
>> A(:,n)
```

3. Merujuk elemen baris ke-m dan kolom ke-n

- Elemen baris ke-2 kolom ke-3

```
>> A(2,3)
```

```
ans =  
0
```

- Elemen baris ke-3 kolom ke-2

```
>> A(3,2)
```

```
ans =  
8
```

- Elemen baris ke-m kolom ke-n

```
>> A(m,n)
```

4. Merujuk elemen baris ke-m kolom tertentu

- Elemen baris ke-2 kolom 2 sampai 3

```
>> A(2,2:3)
```

```
ans =  
9 0
```

5. Merujuk elemen baris tertentu kolom ke-n

- Elemen baris ke-2 sampai 3 kolom ke-3

```
>> A(2:3,3)
ans =
     0
    -7
```

Latihan

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \\ -9 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 22 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 88 & 9 & -9 & 1 \\ -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

1. Elemen-elemen baris ke-2 matriks A
2. Elemen-elemen baris ke-3 matriks B
3. Elemen-elemen kolom ke-5 matriks C
4. Elemen-elemen baris ke-3 sampai ke-4 kolom ke-4 matriks B
5. Elemen-elemen kolom ke-3 sampai ke-4 baris ke-2 matriks C
6. Elemen baris ke-2 kolom ke-3 matriks A, matriks B, matriks C

C. Ukuran Matriks

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

- Menentukan ukuran baris dan kolom matriks A

```
>> A=[2 3 -4 0 0;3 -3 -1 -1 1;0 3 -3 4 9]
A =
     2     3    -4     0     0
     3    -3    -1    -1     1
     0     3    -3     4     9

>> S=size(A)
S =
     3     5
```

```
>> [m,n]=size(A)
m =
    3
n =
    5
(m = baris dan n = kolom)
```

- Banyaknya baris suatu matriks

```
>> m=size(A,1)
m =
    3
```

- Banyaknya kolom suatu matriks

```
>> n=size(A,2)
n =
    5
```

Latihan

Tentukanlah banyaknya baris dan kolom dari matriks-matriks berikut ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

D. Menghasilkan vector dan matriks beraturan

```
>> A=1:6
A =
    1    2    3    4    5    6
```

Matriks A adalah matriks baris dengan interval elemennya 1...6 dengan beda 1

```
>> A=1:2:10
A =
    1    3    5    7    9
```

Matriks A adalah matriks baris dengan interval elemennya 1...10 dengan beda 2

```
>> A=5:-1:2
A =
    5    4    3    2
```

Matriks A adalah matriks baris dengan interval elemennya 5...2 dengan beda -1

```
>> A=[1:3;2:2:6;3:5]
A =
    1    2    3
    2    4    6
    3    4    5
```

Matriks A adalah matriks berordo 3x3 dengan elemen baris 1 intervalnya 1...3 dengan beda 1, baris ke-2 interval elemennya 2..6 dengan beda 2, dan baris ke -3 interval elemennya 3..5 dengan beda 1

E. Matriks Khusus

1. Matriks Identitas

Matriks Identitas adalah suatu matriks diagonal berordo n dengan elemen-elemen pada diagonal utama bernilai 1

```
>> I=eye(2)
I =
    1    0
    0    1
```

```
>> I=eye(3)
I =
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

```
>> I=eye(4)
I =
    1    0    0    0
    0    1    0    0
    0    0    1    0
    0    0    0    1
```

```
>> I=eye(2,4)
I =
    1    0    0    0
    0    1    0    0
```

```
>> I=eye(3,4)
I =
    1    0    0    0
    0    1    0    0
    0    0    1    0
```

2. Matriks Ones

Matriks ones adalah suatu matriks berordo $m \times n$ yang setiap elemennya bernilai satu

```
>> A=ones(1,1)
A =
    1
```

```
>> A=ones(3,1)
A =
    1
    1
    1
```

```
>> A=ones(1,3)
A =
    1    1    1
```

```
>> A=ones(4,3)
A =
    1    1    1
    1    1    1
    1    1    1
    1    1    1
```

```
>> A=ones(3,4)
A =
    1    1    1    1
    1    1    1    1
    1    1    1    1
```

3. Matriks Zeros

Matriks Zeros adalah suatu matriks berordo $m \times n$ yang setiap elemennya bernilai nol

```
>> A=zeros(1,1)
A =
    0
```

```
>> A=zeros(2,1)
A =
    0
    0
```

```
>> A=zeros(1,2)
A =
    0    0
```



```
>> A=zeros(2,2)
A =
    0    0
    0    0
```

```
>> A=zeros(2,3)
A =
    0    0    0
    0    0    0
```

4. Matriks Hilbert

Matriks Hilbert adalah suatu matriks berordo $m \times n$, yang nilai setiap elemennya mempunyai aturan $A(i, j) = \frac{1}{(i + j - 1)}$

```
>> A=hilb(1)
A =
    1
```

```
>> A=hilb(2)
A =
    1    1/2
    1/2    1/3
```

```
>> A=hilb(3)
A =
    1    1/2    1/3
    1/2    1/3    1/4
    1/3    1/4    1/5
```

5. Matriks Pascal

Matriks Pascal adalah suatu matriks berordo $m \times n$, yang nilai setiap elemennya mengikuti aturan teorema segitiga pascal

```
>> A=pascal(2)
A =
    1    1
    1    2
```

```
>> A=pascal(3)
A =
    1    1    1
    1    2    3
    1    3    6
```

```
>> A=pascal(4)
A =
    1    1    1    1
    1    2    3    4
    1    3    6   10
    1    4   10   20
```

- **Matriks Magic**

Matriks magic adalah suatu matriks berordo $m \times n$, yang nilai setiap elemennya mengikuti aturan kaidah bujursangkar ajaib

```
>> A=magic(2)
A =
     1     3
     4     2
```

```
>> A=magic(3)
A =
     8     1     6
     3     5     7
     4     9     2
```

```
>> A=magic(4)
A =
    16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
```

6. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks persegi berordo n dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah dan di atas diagonal utama semuanya bernilai nol

```
>> v
v =
     1     2     3     4
```

```
>> A=diag(v)
A =
     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     3     0
     0     0     0     4
```

7. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah suatu matriks persegi berordo n dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama semuanya bernilai nol

Matriks Segitiga Bawah

```
>> A=[1:3;2:2:6;3:5]
```

```
A =
```

```
1     2     3
2     4     6
3     4     5
```

```
>> B=tril(A)
```

```
B =
```

```
1     0     0
2     4     0
3     4     5
```

Matriks Segitiga Atas

```
>> B=triu(A)
```

```
B =
```

```
1     2     3
0     4     6
0     0     5
```

F. Manipulasi Matriks

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

1. Mengubah elemen baris ke- m kolom ke- n suatu matriks berordo $m \times n$

```
>> A(2,3)=2
```

```
A =
```

```
1     2     3     4
5     6     2     8
9     10    11    12
```

(mengubah elemen baris ke-2 kolom ke-3 matriks A dengan 2)

```
>> A(3,3)=-10
```

```
A =
```

```
1     2     3     4
5     6     7     8
9     10    -10    12
```

(mengubah elemen baris ke-3 kolom ke-3 matriks A dengan -10)

```
>> B = A(1:2,2:3)
```

```
B =
```

```
2     3
6     7
```

(membentuk matriks B, yang elemennya adalah baris 1 dan 2 matriks A dan kolom 2 dan 3 matriks A)

2. Menggabungkan Matriks

Misal $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

```
>> A=[2 -1;3 3]
```

```
A =
```

```
2     -1
3      3
```

```
>> B=[2 2;3 2]
```

```
B =
```

```
2     2
3     2
```

```
>> C=[A B]
```

```
C =
```

```
2     -1     2     2
3      3     3     2
```

```
>> C=[A;B]
```

```
C =
```

```
2     -1
3      3
2     2
3     2
```

Latihan

Dengan menggunakan fungsi penghasil matriks khusus **magic**, **zeros**, **ones**, **eye**, **pascal** dan penggabungan matriks, tentukan perintah untuk membuat matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

G. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Misal $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Penjumlahan Suatu Bilangan Real Terhadap Matriks

```
>> C=2+A
```

```
C =  
 4     1  
 5     5
```

```
>> C=2+B
```

```
C =  
 4     4  
 5     4
```

2. Penjumlahan Dua Buah Matriks

```
>> C=A+B
```

```
C =  
 4     1  
 6     5
```

```
>> C=B+A
```

```
C =  
 4     1  
 6     5
```

3. Pengurangan Suatu Bilangan Real Terhadap Matriks

$$\gg C=A-2$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gg C=B-2$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Pengurangan Dua Buah Matriks

$$\gg C=A-B$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gg C=B-A$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Latihan

1. Jika diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tentukanlah :

- a. $P+Q$ c. $(P+Q)+R$ e. $P-Q$ g. $(P+Q)-R$
b. $Q+R$ d. $P+(Q+R)$ f. $Q-P$ h. $Q-(R+Q)$

2. Jika diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

tentukanlah :

- a. $A+B$ c. $B(:,1:3)+C$ e. $B-A+B$
b. $A+C$ d. $A-B$ f. $B(:,1:3)+C-A(:,1:3)$

H. Perkalian Matriks

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Perkalian Suatu Bilangan Real Terhadap Matriks

```
>> D=2*A
```

```
D =  
 4    -2  
 6     6
```

```
>> D=2*B
```

```
D =  
 4     4  
 6     4
```

```
>> D=2*C
```

```
D =  
 4     2     2     0  
 4     6     0     0
```

2. Perkalian Dua Buah Matriks

```
>> D=A*B
```

```
D =  
 1     2  
 15    12
```

```
>> D=B*A
```

```
D =  
 10     4  
 12     3
```

```
>> D=A*C
```

```
D =  
 2     -1     2     0  
 12    12     3     0
```

```
>> D=A*B*C
```

```
D =  
 6     7     1     0  
 54    51    15    0
```

3. Perkalian Elemen Matriks

```
>> D=A.*B
```

```
D =  
 4     -2  
 9     6
```

```
>> D=B.*A
D =
     4     -2
     9      6
```

```
>> D=C.*C
D =
     4     1     1     0
     4     9     0     0
```

Latihan

Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------------|
| a. $A * B$ | c. $C * A$ | e. $A * B$ | g. $(C * A) * B$ |
| b. $B * A$ | d. $C * B$ | f. $B * A$ | f. $(C * C) * C$ |

I. Transpose Matriks

Misal $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

```
>> A=[2 0 2;3 3 7]
```

```
A =
     2     0     2
     3     3     7
```

```
>> A'
```

```
ans =
     2     3
     0     3
     2     7
```

```
>> (A)'
```

```
ans =
     2     0     2
     3     3     7
```


Latihan

Tentukan transpose matriks-matriks berikut ini :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -6 & -6 \\ 9 & -7 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & 8 & 8 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \\ 9 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

J. Determinan Matriks

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
>>> A=[2 3;-2 4]
```

```
A =  
     2     3  
    -2     4
```

```
>>> B=[2 2 3;4 2 1;1 0 0]
```

```
B =  
     2     2     3  
     4     2     1  
     1     0     0
```

```
>>> det(A)
```

```
ans =  
    14
```

```
>>> det(B)
```

```
ans =  
    -4
```

K. Invers Suatu matriks

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

```
>>> inv(A)
```

```
ans =  
     2/7    -3/14  
     1/7     1/7
```

```
>>> A*inv(A)
```

```
ans =  
     1     0  
     0     1
```

```
>> inv(B)
ans =
    0    0    1
   -1/4  3/4  -5/2
    1/2  -1/2   1
```

```
>> B*inv(B)
ans =
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

```
>> C=[9 5;7 4]
C =
    9    5
    7    4
```

```
>> D=[4 -5;-7 9]
D =
    4   -5
   -7    9
```

```
>> inv(C)
ans =
    4   -5
   -7    9
```

```
>> inv(D)
ans =
    9    5
    7    4
```

```
>> C*D
ans =
    1    0
    0    1
```

L. Perpangkatan Matriks

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A * A, A^3 = A * A * A$$

```
>> A^2
ans =
    7  18
    6  19
```

```
>> A^3
ans =
    32  93
    31  94
```

```
>> B^2
ans =
    15  8  8
    17 12 14
     2  2  3
```

```
>> B^3
ans =
    70  46  53
    96  58  63
    15  8  8
```

Perpangkatan Elemen Matriks

```
>> A.^2
ans =
     4  9
     1 16
```

```
>> A.^3
ans =
     8 27
     1 64
```

```
>> B.^2
ans =
     4  4  9
    16  4  1
     1  0  0
```

```
>> B.^3
ans =
     8  8 27
    64  8  1
     1  0  0
```

M. Pembagian Matriks

Misal $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$

1. Pembagian Kanan

Jika A^{-1} ada, maka $B / A = B * A^{-1}$

```
>> A=[9 5;7 4]
```

```
A =
```

```
 9  5  
 7  4
```

```
>> B=[4 -5;-7 9]
```

```
B =
```

```
 4  -5  
-7   9
```

```
>> inv(A)
```

```
ans =
```

```
 4  -5  
-7   9
```

```
>> B/A
```

```
ans =
```

```
 51  -65  
-91  116
```

```
>> B*inv(A)
```

```
ans =
```

```
 51  -65  
-91  116
```

Operasi Elemen

$$C = B ./ A, c_{ij} = b_{ij} / a_{ij}, a_{ij} \neq 0$$

```
>> C=B./A
```

```
C =
```

```
 4/9  -1  
-1   9/4
```

2. Pembagian Kiri

Jika A^{-1} ada, maka $A \setminus B = A^{-1} * B$

```
>> A\B
ans =
    51    -65
   -91    116
```

```
>> inv(A)*B
ans =
    51    -65
   -91    116
```

Operasi Elemen

$C = A \setminus B$, $c_{ij} = a_{ij} / b_{ij}$, $b_{ij} \neq 0$

```
>> C=A.\B
C =
    4/9    -1
    -1    9/4
```

Latihan

1. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ tentukanlah

- | | | | |
|-----------------|----------------|----------------------|--------------------|
| a. $(A+B)(A-B)$ | d. B^2 | g. A/B | j. A/B |
| b. A^2 | e. $A^2 - B^2$ | h. B/A | k. $B \setminus A$ |
| c. $(A+B)^2$ | f. $(A-B)^2$ | i. $A^2 + 2AB + B^2$ | |

2. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

. Tunjukkanlah bahwa

- | | | |
|------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a. $A^2 = A$ | d. $D^3 = 0$ | f. $BA^{-1} = B/A$ |
| b. $B^2 = I$ | e. $A^{-1}A$ | g. $A^{-1}B = A \setminus B$ |
| c. $C^2 - 4C - 5I = 0$ | f. $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})'$ | h. $(\det(A)B)^{-1}$ |

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, Tentukanlah

- | | | | |
|---------|----------------|-------------|-------------------|
| a. AB | c. $(AB)^{-1}$ | e. A^{-1} | g. $A^{-1}B^{-1}$ |
|---------|----------------|-------------|-------------------|

b. BA d. $(BA)^{-1}$ f. B^{-1} h. $B^{-1}A^{-1}$

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Tentukanlah :

a. ABC c. $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ e. $((ABC)^{-1})'$
 b. $(ABC)^{-1}$ d. $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ f. $((ABC)')^{-1}$

N. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Matriks

1. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

SPDLV diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks, yaitu :

Misal $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, maka

$$AX = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$X = A^{-1}C \text{ atau } X=A \setminus C$$

Atau

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, \text{ dengan } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

SPLDV mempunyai penyelesaian :

- Tunggal, jika $D \neq 0$
- Tak hingga, jika $D = D_x = D_y = 0$
- Tidak Punya Penyelesaian, jika $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$

Contoh :

a. Tentukan penyelesaian SPLDV berikut $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 36 \end{cases}$

Penyelesaian

```
>> A=[2 -3;3 4]
```

```
A =  
     2     -3  
     3      4
```

```
>> det(A)
```

```
ans =  
    17
```

```
>> C=[7;36]
```

```
C =  
     7  
    36
```

```
>> X=inv(A)*C
```

```
X =  
     8  
     3
```

```
>> X=A\C
```

```
X =  
     8  
     3
```

Jadi penyelesaian dari SPLDV di atas adalah $x = 8, y = 3$

- b. Tentukan penyelesaian SPLDV $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$

Penyelesaian

```
>> A=[1 -1;2 -2]
```

```
A =  
     1     -1  
     2     -2
```

```
>> C=[4;-1]
```

```
C =  
     4  
    -1
```

```
>> X=inv(A)*C
```

Warning: Matrix is singular to working precision.

```
X =  
    0/0  
    0/0
```

```
>> X=A\C
Warning: Matrix is singular to working precision.
X =
    1/0
    1/0
```

```
>> det(A)
ans =
    0
```

SPLDV di atas tidak mempunyai penyelesaian karena $D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$

```
>> A=[1 -1;2 -2]
A =
    1  -1
    2  -2
```

```
>> det(A)
ans =
    0
```

```
>> Dx=[4 -1;-1 -2]
Dx =
    4  -1
   -1  -2
```

```
>> det(Dx)
ans =
   -9
```

```
>> x=det(Dx)/det(A)
Warning: Divide by zero.
x =
   -Inf
```

```
>> Dy=[1 4;2 -1]
Dy =
    1  4
    2 -1
```

```
>> det(Dy)
ans =
   -9
```

```
>> y=det(Dy)/det(A)
```


Warning: Divide by zero.

y =
-Inf

- c. Tentukan penyelesaian SPLDV $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

Penyelesaian

```
>> A=[1 1;3 3]
```

```
A =  
    1    1  
    3    3
```

```
>> det(A)
```

```
ans =  
    0
```

```
>> C=[2;6]
```

```
C =  
    2  
    6
```

```
>> X=inv(A)*C
```

Warning: Matrix is singular to working precision.

```
X =  
    1/0  
    1/0
```

```
>> X=A\C
```

Warning: Matrix is singular to working precision.

```
X =  
    1/0  
    1/0
```

SPLDV di atas punya tak hingga penyelesaian karena $D = D_x = D_y = 0$

```
>> A=[1 1;3 3]
```

```
A =  
    1    1  
    3    3
```

```
>> det(A)
```

```
ans =  
    0
```

```
>> Dx=[2 1;6 3]
```

```
Dx =  
 2  1  
 6  3
```

```
>> det(Dx)  
ans =  
 0
```

```
>> Dy=[1 2;3 6]  
Dy =  
 1  2  
 3  6
```

```
>> det(Dy)  
ans =  
 0
```

```
>> x=det(Dx)/det(A)  
Warning: Divide by zero.  
x =  
 NaN
```

```
>> y=det(Dy)/det(A)  
Warning: Divide by zero.  
y =  
 NaN
```

2. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

$$\text{Misal } \begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Maka penyelesaian SPLTV tersebut adalah

```
>> A=[1 1 -1;2 1 1;1 2 1]  
A =  
 1  1 -1  
 2  1  1  
 1  2  1
```

```
>> det(A)  
ans =  
 -5
```

```
>> C=[-3;4;7]  
C =  
 -3  
  4  
  7
```

```
>> X=inv(A)*C
X =
    -1
     2
     4
```

```
>> X=A\C
X =
    -1
     2
     4
```

Jadi penyelesaian SPLTV di atas adalah $x = -1, y = 2, z = 4$

Latihan

Tentukan penyelesaian dari system persamaan linear berikut ini :

1.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 2x - 5y = 76 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 10x - 6y = 5 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y + 2z = 8 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 3y - z = 15 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 4x - 2y + z = -6 \\ x + y = 0 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 2x + 3.1y = 10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 12 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 2y = 3 \\ y + 2z = 5 \\ 2.5x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

Daftar Pustaka

Sahid, 2004. *Petunjuk Praktikum Aplikasi Komputer dengan Matlab (Edisi Revisi)*, Laboraturium Komputer Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.

_____, 2001. *Matlab : The Language of Technical Computing Version 6.1.0.450 Release 12.1*. The Mathwork Inc. www.mathwork.com ,