Program *Cone* Order Dua

Caturiyati, Ch. Rini Indrati, Lina Aryati

Abstrak

Paper ini merupakan literatur review dari beberapa literatur sebagai dasar penelitian yang sedang kami kerjakan. Paper ini membahas mengenai masalah optimisasi yang dapat dinyatakan sebagai masalah program *cone* order dua (Second-order *cone* program/SOCP). Selanjutnya menguraikan suatu cara menentukan solusi yaitu menggunakan metode titik interior primal-dual.

Kata kunci: optimisasi konveks, program kuadratik, metode titik interior primal-dual.

Pandang program *cone* order dua (SOCP) sebagai masalah

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i,\ i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel optimum, dan parameter masalah adalah $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

Kendala

$$\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i$$

disebut kendala *cone* order dua berdimensi n_i.

Cone (konveks) order dua standar atau satuan berdimensi k didefinisikan sebagai

$$C_k = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ t \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq t \right\}$$

(yang juga disebut *cone* kuadratik, es krim, atau Lorentz).

Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala *cone* order dua adalah:

$$\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_{n_i}$$

dan konveks.

Himpunan dan Fungsi SOC *representable*

Dikatakan suatu himpunan konveks $C \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah *representable cone* order dua (atau SOC *representable*) jika C dapat dinyatakan dengan sejumlah kendala *cone* order dua, yaitu terdapat $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times(n+m)}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^{n+m}, d_i$, sehingga

$$\boldsymbol{x} \in C \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \text{ sehingga } \left\| \boldsymbol{A}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}_i \right\| \leq \boldsymbol{c}_i^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + d_i,\ i = 1, \dots, N.$$

Dikatakan suatu fungsi f *representable cone* order dua jika epigrafnya $\{(\boldsymbol{x}, t) | \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq t\}$ mempunyai representasi *cone* order dua.

Jika $\boldsymbol{f}$ dan C adalah SOC *representable*, maka masalah optimisasi konveks

meminimumkan $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

dengan kendala $\boldsymbol{x} \in C$

dapat dinyatakan sebagai suatu SOC.

Contoh Masalah

Pandang program kuadratik kendala kuadratik konveks (QCQP)

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{x} + r_0 \\ &\text{dengan kendala } \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{x} + r_i \leq 0,\ i = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks semidefinit positif dan simetrik.

Diasumsikan $\boldsymbol{P}_i$ matriks definit positif, secara umum masalah dapat direduksi menjadi SOCP, dan QCQP (2) dapat dituliskan sebagai

$$\text{meminimumkan } \left\| {\boldsymbol{P}_0}^{1/2}\boldsymbol{x} + {\boldsymbol{P}_0}^{-1/2}\boldsymbol{q}_0 \right\|^2 + r_0 - \boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{P}_0^{-1} \boldsymbol{q}_0$$

$$\text{dengan kendala } \left\| {\boldsymbol{P}_i}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x} + {\boldsymbol{P}_i}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{q}_i \right\|^2 + r_i - \boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{P}_i^{-1} \boldsymbol{q}_i \leq 0,$$

$$i = 1, \ldots, p,$$

yang merupakan masalah SOCP dengan $p + 1$ kendala berdimensi $n + 1$ sebagai

$$
\begin{aligned}
&\text{meminimumkan } t \\
&\text{dengan kendala } \left\| \boldsymbol{P}_0{}^{1/2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_0{}^{-1/2}\boldsymbol{q}_0 \right\| \leq t, \\
&\qquad\qquad\qquad \left\| \boldsymbol{P}_i{}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_i{}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{q}_i \right\| \leq (\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{q}_i - r_i)^{\frac{1}{2}}, \\
&\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, p,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dengan $t \in \mathbb{R}$ variabel optimisasi baru.

Nilai optimal dari SOCP (2) sama dengan $p^{*^2} + r_0 - \boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{P}_0^{-1}\boldsymbol{q}_0$, dengan p^* adalah nilai optimal SOCP (3).

Masalah program kuadratik konveks (QP)

$$\text{meminimumkan } \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{x} + r_0 \qquad (4)$$

$$\text{dengan kendala } \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i,\ \ i = 1, \dots, p,$$

$(\boldsymbol{P}_0 \succ 0)$ sebagai suatu SOCP dengan satu kendala berdimensi $n + 1$ dan p kendala berdimensi satu sebagai

$$\text{meminimumkan } t$$

$$\text{dengan kendala } \left\| \boldsymbol{P}_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_0^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{q}_0 \right\| \leq t, \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i,$$

$$i = 1, \dots, p,$$

dengan $\boldsymbol{x}$ dan t adalah variabel.

Metode Primal Dual Titik Interior

Untuk penyederhanaan notasi dalam masalah (1), dimisalkan

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + b_i, \boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, i = 1, \dots, N,$$

sehingga masalah SOCP (1) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{u}_i\| \le t_i, i = 1, \dots, N \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + b_i, \boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, \\ &\qquad\qquad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{5}$$

Dual dari SOCP (1) diberikan oleh

$$\begin{aligned} &\text{memaksimumkan} - \textstyle\sum_{i=1}^{N} (b_i^T z_i + d_i w_i) \\ &\text{dengan kendala} \textstyle\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{z}_i + c_i w_i) = \boldsymbol{f}, \\ &\qquad\qquad\qquad \|\boldsymbol{z}_i\| \leq w_i, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{6}$$

Variabel optimisasi dual adalah vektor $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^{n_i - 1}$, dan $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N$.

SOCP primal (1) disebut fisibel jika terdapat fisibel primal $\boldsymbol{x}$, yaitu, suatu $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi semua kendala dalam (1). Ini disebut fisibel tegas jika terdapat suatu fisibel primal tegas $\boldsymbol{x}$, yaitu, suatu $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi kendala dengan ketaksamaan tegas. Vektor-vektor $\boldsymbol{z}$ dan $\boldsymbol{w}$ disebut fisibel dual jika memenuhi kendala dalam (6) dan fisibel dual tegas jika dalam tambahan memenuhi $\|\boldsymbol{z}_i\| \leq w_i, i = 1, \dots, N$. Dikatakan SOCP dual (6) fisibel (tegas) jika terdapat fisibel (tegas) $\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{w}$.

Fakta mendasar tentang masalah dual adalah:

1. (dualitas lemah) $p^* \geq d^*$;
2. (dualitas kuat) jika masalah primal atau dual fisibel tegas, maka $p^* = d^*$;
3. Jika masalah primal dan dual fisibel tegas adalah fisibel tegas, maka terdapat titik-titik fisibel primal dan dual yang memenuhi nilai optimal (sama).

Perbedaan antara tujuan primal dan dual disebut gap dualitas terkait dengan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$, dan akan dinotasikan dengan $\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$, atau sederhana η:

$$\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{z}_i + d_i w_i). \qquad (7)$$

Barrier untuk *cone* order dua

Didefinisikan untuk $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\boldsymbol{u}, t) = \begin{cases} -\log(t^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2), & \|\boldsymbol{u}\| < t, \\ \infty & \text{lainnya} \end{cases} \tag{12}$$

fungsi ϕ adalah fungsi barrier untuk *cone* order dua C_m: $\phi(\boldsymbol{u}, t)$ finite jika dan hanya jika $(\boldsymbol{u}, t) \in C_m$ (yaitu $\|\boldsymbol{u}\| < t$), dan $\phi(\boldsymbol{u}, t)$ konvergen ke ∞ untuk $(\boldsymbol{u}, t)$ mendekati batas dari C_m.

Derivatif pertama dan keduanya diberikan oleh

$$\nabla\phi(\boldsymbol{u},t) = \frac{2}{t^2 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ -t\end{bmatrix}$$

dan

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{u},t) = \frac{2}{(t^2 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})^2}\begin{bmatrix}(t^2 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})I + 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T & -2t\boldsymbol{u}\\ -2t\boldsymbol{u}^T & t^2 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\end{bmatrix}.$$

Fungsi potensial primal dual

Untuk $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ fisibel tegas, didefinisikan fungsi potensial primal dual sebagai

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \left(2N + \nu\sqrt{2N}\right)\log \eta + \sum_{i=1}^{N}\left(\phi(u_i, t_i) + \phi(z_i, w_i)\right) - 2N \log N \quad (13)$$

dengan $\nu \geq 1$ parameter algoritma, dan η gap dualitas terkait dengan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$.

Sifat paling penting dari fungsi potensial adalah ketaksamaan

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \leq \exp\left(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})/\nu\sqrt{2N}\right), \quad (14)$$

yang memenuhi semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ fisibel tegas.

Ketaksamaan (14) dapat dijelaskan secara mudah dengan mengikuti fakta

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = 2N\log\eta + \sum_{i=1}^{N}\left(\phi(u_i,t_i) + \phi(z_i,w_i)\right) - 2N\log N \geq 0 \quad (15)$$

untuk semua $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ fisibel tegas.

Akibatnya $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \geq \nu\sqrt{2N}\log\left(\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right)$, dan diperoleh persamaan (14).

Algoritma reduksi potensial primal dual

Pada setiap iterasi metode Nesterov dan Nemirovsky, arah pencarian primal dual $\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{z}, \delta\boldsymbol{w}$ dihitung dengan menyelesaikan himpunan persamaan linear

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-1} & \overline{\boldsymbol{A}} \\ \overline{\boldsymbol{A}}^{T} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{Z} \\ \delta\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{H}^{-1}(\rho\boldsymbol{Z} + g) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

dalam variabel $\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{Z}$, dengan ρ sama dengan $\rho = \left(2N + \nu\sqrt{2N}\right)/\eta$, dan

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \nabla^2\phi(u_1, t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \nabla^2\phi(u_N, t_N) \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} \nabla\phi(u_1, t_1) \\ \\ \nabla\phi(u_N, t_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z} = [z_1^T w_1 \quad \dots \quad z_N^T w_N]^{\mathrm{T}}, \delta Z = [\delta z_1^T \delta w_1 \quad \dots \quad \delta z_N^T \delta w_N]^{\mathrm{T}}.$$

Algoritma reduksi potensial primal dual

Diberikan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ fisibel tegas, suatu toleransi $\epsilon > 0$, dan suatu parameter $\nu \geq 1$.

Ulangi

1. Tentukan arah pencarian primal dual dengan menyelesaikan persamaan (39)
2. Pencarian bidang. Tentukan $p, q \in \mathbb{R}$ yang meminimumkan $\varphi(\boldsymbol{x} + p\delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} + q\delta\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} + q\delta\boldsymbol{w})$.
3. Perbaruan. $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x} + p\delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} := \boldsymbol{z} + q\delta\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} := \boldsymbol{w} + q\delta\boldsymbol{w}$.

Sampai $\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \leq \epsilon$.

Pada setiap iterasi algoritma berlaku fungsi potensial turun oleh sedikitnya suatu jumlah tertentu, yaitu

$$\varphi\left(x^{(k+1)}, z^{(k+1)}, w^{(k+1)}\right) \leq \varphi\left(x^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)}\right) - \delta$$

dengan $\delta > 0$.

Menentukan titik awal fisibel tegas

Batas pada variabel primal: Titik-titik fisibel dual tegas dalam SOCP dapat diperoleh ketika kendala primal meliputi batas yang jelas $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$ atau suatu kendala norma $\|\boldsymbol{x}\| \leq R$.

Sebagai contoh, memodifikasi SOCP (1) dengan menambahkan batas pada norma $\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, i = 1, \dots, N, \quad (19) \\ &\qquad\qquad\qquad \|\boldsymbol{x}\| \leq R. \end{aligned}$$

Jika R cukup besar maka kendala ekstra tidak dapat merubah solusi, dan nilai optimal SOCP (19) adalah

$$\begin{aligned} &\text{memaksimumkan} - \textstyle\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{z}_i + d_i w_i) - Rw_{N-1} \\ &\text{dengan kendala} \textstyle\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{z}_i + c_i w_i) + z_{N+1} = f, \\ &\qquad \|\boldsymbol{z}_i\| \le w_i, i = 1, \dots, N+1. \end{aligned} \tag{20}$$

Titik-titik fisibel tegas untuk masalah (20) adalah,

- untuk $i = 1, \dots, N$, dapat diambil suatu $w_i > \|\boldsymbol{z}_i\|$.
- variabel $\boldsymbol{z}_{N+1}$ dari kendala persamaan (20), dan untuk w_{N+1} dapat diambil sebarang bilangan lebih besar dari $\|\boldsymbol{z}_{N+1}\|$.

Ide penambahan batas pada variabel primal adalah variasi metode M besar pada program linear.

Fase I Metode: Suatu titik fisibel tegas primal dapat dikomputasi dengan menyelesaikan SOCP.

$$\begin{array}{ll} \text{meminimumkan } t \\ \text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i + t, i = 1, \dots, N, \end{array} \quad (21)$$

dalam variabel $\boldsymbol{x}$ dan t.

Jika $(\boldsymbol{x}, t)$ fisibel dalam (21), dan $t < 0$, maka $\boldsymbol{x}$ memenuhi $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}$, yaitu, fisibel tegas untuk SOCP original (1).

Sehingga dapat ditentukan $\boldsymbol{x}$ fisibel tegas dengan menyelesaikan SOCP (21), mendapatkan nilai optimalnya t^* negatif. Jika $t^* > 0$, SOCP original (1) tak fisibel.

Suatu pilihan yang mungkin adalah

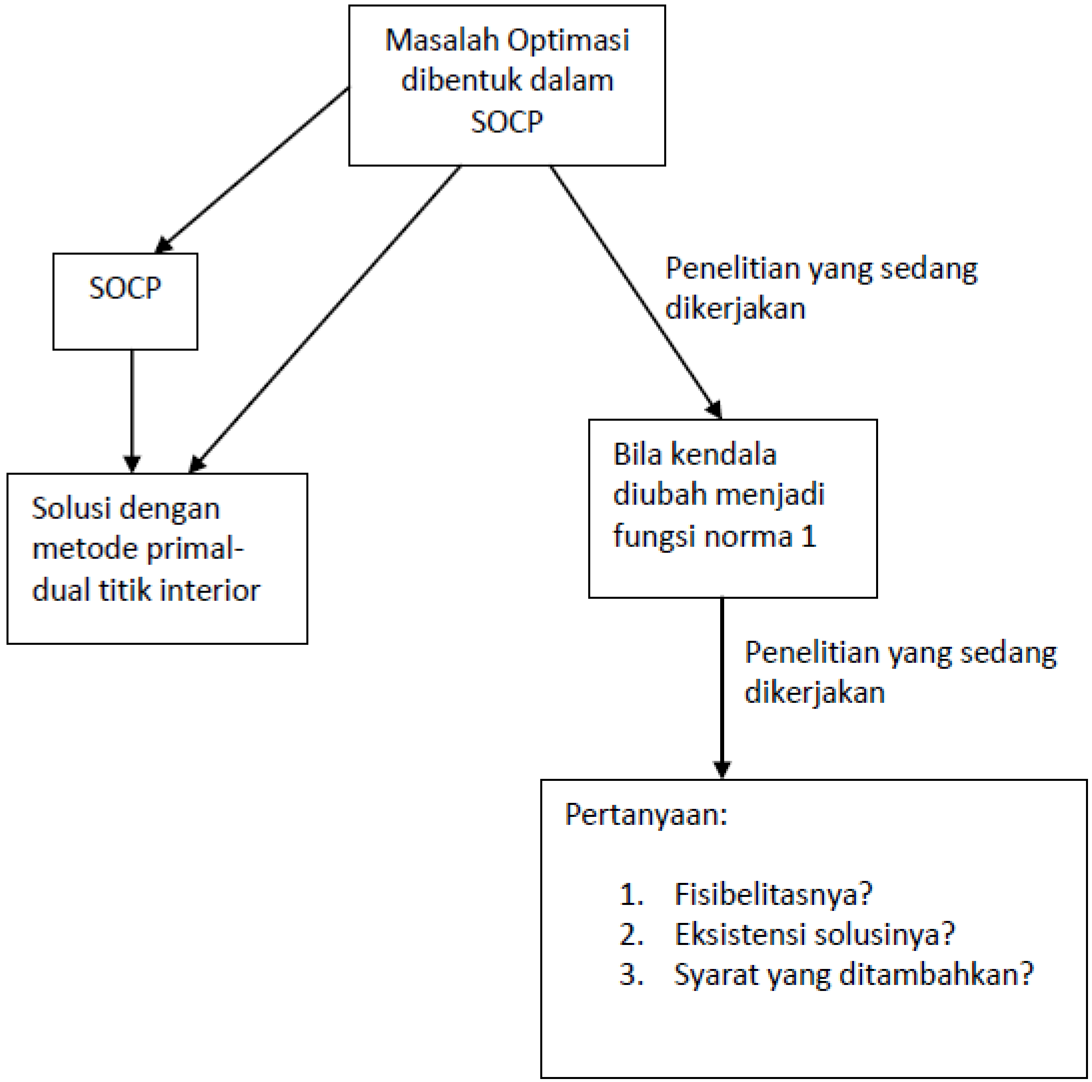
$$\boldsymbol{x} = 0, t > \max_i \|\boldsymbol{b}_i\| - d_i.$$

Dual dari SOCP (21) adalah

$$\begin{aligned} &\text{memaksimumkan } \textstyle\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{z}_i + d_i \boldsymbol{w}_i) \\ &\text{dengan kendala } \textstyle\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{c}_i w_i) = 0, \\ &\qquad \textstyle\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \\ &\qquad \|\boldsymbol{z}_i\| \leq w_i, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{22}$$

Jika suatu fisibel tegas $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ untuk (22) ada, maka fase I diselesaikan dengan mengaplikasikan algoritma primal dual bagian sebelumnya dari (21) dan (22).

Jika tidak ada $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ fisibel tegas untuk masalah (22), maka dapat ditambahkan suatu batas pada variabel primal.



Masalah Optimasi dibentuk dalam SOCP
SOCP
Solusi dengan metode primal-dual titik interior
Penelitian yang sedang dikerjakan
Bila kendala diubah menjadi fungsi norma 1
Penelitian yang sedang dikerjakan
Pertanyaan:
1. Fisibelitasnya?
2. Eksistensi solusinya?
3. Syarat yang ditambahkan?