

ANALISA KESTABILAN

Fatchul Arifin
(fatchul@uny.ac.id)

Pole, Zero dan Pole-Zero Plot

Numerator dan denominator pada fungsi RASIONAL juga mempunyai nilai nol.

Nilai nol dari numerator disebut ZERO dan nilai nol dari denominator disebut POLE.

Pole dan zero merupakan bilangan kompleks. Gambaran grafis pole dan zero tentulah pada bidang kompleks. Gambaran grafis pole dan zero pada bidang kompleks disebut pole-zero plot.

Contoh 1.

Sebuah sistem mempunyai transfer function $H(s)=1/(s+1)$. Maka zeronya tidak ada, dan polenya terletak di $s=-1$.

Contoh 2.

Sistem diskret $H(z)=z/(z-0.7)$ mempunyai zero di $z=0$ dan pole di $z=0.7$.

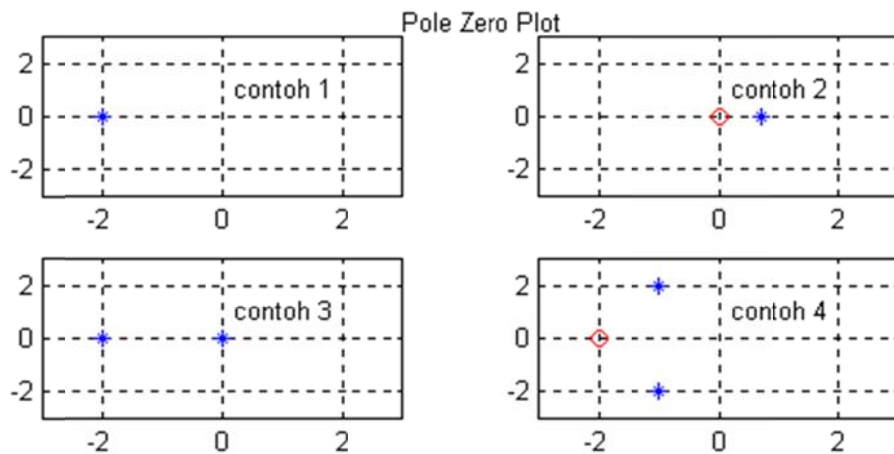
Contoh 3.

Sistem $H(s)=5/s(s+2)$ tidak mempunyai zero dan mempunyai pole di $s=0$ dan $s=-2$.

Contoh 4.

Sistem $H(s)=(s+2)/(s^2+2s+5)$ mempunyai zero di $s=-2$ dan pole di $s=-1-j2$ dan $s=-1+j2$.

Pole zero plot dari keempat sistem pada contoh 1 sampai contoh 4 terlihat pada gambar ini. Ingat keempatnya merupakan bidang kompleks, sumbu mendatar adalah bagian riil dan sumbu vertikal adalah bagian imajiner.



Nilai nol polinomial dengan mudah dapat dihitung dengan MatLab. Perintah yang digunakan adalah roots. Sebagai contoh untuk mencari nilai nol dari polinomial s^2+2s+5 maka dimasukkan perintah berikut:

```
POL=[1 2 5];roots(POL)
maka akan muncul jawaban
ans =
```

```
-1.0000 + 2.0000i
-1.0000 - 2.0000i
```

Perhatikan: untuk mencari nilai nol polinomial s^3+4s , maka perintah yang dimasukkan adalah `POL=[1 0 4 0];roots(POL)`

Jika pole dan zero sebuah sistem diketahui, maka transfer function sistem dapat dihitung asalkan gain sistem juga diketahui.

Contoh 1. Sistem dengan gain=2, zero tidak ada dan pole di $s=-2$ mempunyai numerator $N(s)=1$, denominator $D(s)=s+2$ sehingga transfer functionnya adalah $H(s)=2/(s+2)$

Contoh 2. Sistem dengan gain=4, zero di $s=-1$, dan pole di $s=-1+j$ dan $s=-1-j$ mempunyai numerator $N(s)=s+1$, denominator $D(s)=(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2$ sehingga transfer functionnya adalah $H(s)=4(s+1)/(s^2+2)$

Root Locus:

- ” • Karakteristik tanggapan transient sistem loop tertutup dapat ditentukan dari lokasi pole-pole (loop tertutupnya).
- ❖ System stabil pole-pole loop tertutup terletak disebelah kiri bidang-s

- „ Bila K berubah, maka letak pole-pole nya juga berubah.
- Perlu pemahaman pola perpindahan letak pole-pole dalam bidang s .
- Desain sistem kendali melalui gain adjustment: pilih K sehingga pole-pole terletak ditempat yang diinginkan.
- Desain sistem kendali melalui kompensasi: memindahkan letak pole yang tak diinginkan melalui pole-zero cancellation.

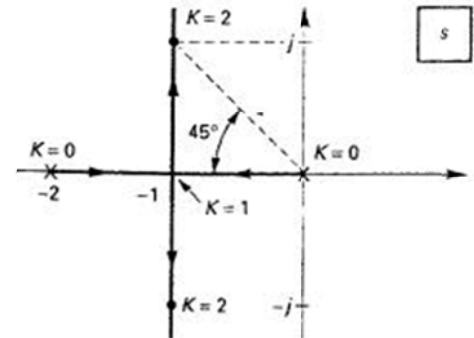
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Persamaan Karakteristik: $s^2 + 2s + K = 0$

Akar-akar Persamaan Karakteristik :

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

K	s_1	s_2
0	0	-2
1	-1	-1
2	$-1+j1$	$-1+j1$
10	$-1+j3$	$-1+j3$
101	$-1+j10$	$-1+j10$



- W.R. Evan mengembangkan metoda untuk mencari akar-akar persamaan orde tinggi : metoda Root Locus.
 - Root Locus: tempat kedudukan akar-akar persamaan karakteristik dengan $K = 0$ sampai $K = \infty$.
 - Melalui Root Locus dapat diduga pergeseran letak pole-pole terhadap perubahan K , terhadap penambahan pole-pole atau zero-zero loop terbuka.
- ROOT = akar-akar
 - LOCUS = tempat kedudukan
 - ROOT LOCUS
 - Tempat kedudukan akar-akar persamaan karakteristik dari sebuah sistem pengendalian proses
 - Digunakan untuk menentukan stabilitas sistem tersebut: selalu stabil atau ada batas kestabilannya?
 - Root locus merupakan suatu teknik grafis yang memberikan kita deskripsi kualitatif mengenai performa suatu sistem kontrol.
 - Root locus dapat juga digunakan untuk menaksir stabilitas.

Root Locus mempunyai sifat simetri terhadap sumbu nyata.

Root Locus cukup bermanfaat dalam desain sistem kendali linear karena Root Locus dapat menunjukkan pole-pole dan zero-zero loop terbuka mana yang harus diubah sehingga spesifikasi unjuk kerja sistem dapat dipenuhi.

Pendekatan desain melalui Root Locus sangat cocok diterapkan untuk memperoleh hasil secara cepat.

Sistem kendali yang membutuhkan lebih dari 1 parameter untuk diatur masih dapat menggunakan pendekatan Root Locus dengan mengubah hanya 1 parameter pada satu saat.

Root Locus sangat memudahkan pengamatan pengaruh variasi suatu parameter (K) terhadap letak pole-pole.

Adapun cara-cara untuk mengetahui atau mencari root locusnya sebagai berikut:

- Cara 1: Mencari akar-akar persamaan karakteristik pada tiap inkremen harga K_c (controller gain)
- Cara 2:
 - Mencari harga *pole* dan *zero*
 - Menentukan harga *breakaway point*, *center of gravity*, asimtot
 - Mencari harga ω_u (titik potong dengan sumbu imajiner, menggunakan substitusi langsung)

Dan untuk mengetahui kestabilan tersebut tentu juga kita harus mengetahui pole dan zero dari persamaan TF total dari blok diagram:

METODE ROUTH HURWITZ

- Transfer function dari suatu sistem **loop tertutup** berbentuk :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Hal pertama → memfaktorkan A(s)
 - A(s) : persamaan karakteristik
- Pemfaktoran polinomial dengan orde lebih dari 2 cukup sulit, sehingga digunakan
 - **Kriteria Kestabilan Routh**
- Kriteria kestabilan Routh memberi informasi **ada tidaknya** akar positif pada persamaan karakteristik bukan **nilai** akar tersebut

· Untuk sistem kendali, ketabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik.

- ❖ System stabil pole-pole loop tertutup terletak disebelah kiri bidang-s
- ❖ Dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh, dapat diketahui jumlah pole loop tertutup yang terletak didaerah tak stabil tanpa perlu mencari solusi persamaan karakteristi A(s)

Fungsi alih loop tertutup:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

- Kriteria ini menunjukkan adalah akar-akar tak stabil persamaan polinom orde n (n=berhingga) tanpa perlu menyelesaikannya
- Untuk system kendali, kestabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik

PROSEDUR

1. Tulis persamaan orde-n dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

Dengan koefisien-koefisien: besaran nyata dan $a_n \neq 0$

2. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negative disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner a atau memiliki bagian real positif (system tak stabil). Kondisi pewrlu (tetapu belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.
3. Bila semua koefisien positif, buat tabel Routh debagai berikut:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	. . .
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	. . .
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	. . .
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	. . .
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	. . .
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Dengan koefisien-koefisien :

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \quad c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \quad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \quad c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$$

4. Kriteria kestabilan Routh : banyaknya akar tak stabil = banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh
5. Syarat pelu dan cukup untuk stabil :
 - Semua koefisien persamaan karakteristik positif dan
 - Semua suku pada kolom pertama tabel routh bertanda positif.

Contoh:

ANALISIS SISTEM KENDALI

1. Langkah pertama analisis : penurunan model matematis sistem.
2. Ada beberapa metoda analisis unjuk kerja sistem :
 - Analisis Kestabilan : Routh Hurwith, Root Locus, Bode Plot Nyquist Plot.
 - Analisis Waktu Alih : spesifikasi koefisien redaman dan frekuensi natural.
 - Analisis Keadaan mantap : Konstanta mantap statik
 - Analisis Kepekaan
3. Untuk memudahkan analisis, digunakan beberapa sinyal uji dengan fungsi waktu sederhana.
4. Sinyal-Sinyal Pengujian :
 - fungsi step : gangguan yang muncul tiba-tiba
 - fungsi ramp : fungsi berubah bertahap terhadap waktu
 - fungsi percepatan
 - fungsi impuls : gangguan sesaat yang muncul tiba-tiba
 - fungsi sinusoidal : linearitas sistem
5. Pemilihan sinyal uji harus mendekati bentuk input sistem pada kondisi kerjanya.
6. Tanggapan waktu :
 - waktu alih : keadaan awal hingga keadaan akhir.
 - keadaan tunak : tanggapan pada waktu $t \rightarrow \infty$
7. Kriteria Unjuk Kerja Sistem Kendali :
 - Kestabilan mutlak : sistem stabil bila keluarannya dapat kembali ke nilai semula setelah ada gangguan.
 - Kestabilan relatif (tanggapan waktu alih) : sistem harus cukup cepat tanggapannya terhadap perubahan masukan dan kembali ke keadaan mantapnya.
 - Galat keadaan mantap : perbedaan antara keluaran dengan masukan yang menunjukkan ketelitian sistem.
 - Kepekaan sistem terhadap perubahan karakteristik komponennya.