5. INVERS MATRIKS

Sebelum pembahasan tentang invers matriks lebih lanjut, kita bahas dahulu beberapa pengertian-pengertian berikut ini.

a. RANK MATRIKS

Matriks tak nol A dikatakan mempunyai rank r jika paling sedikit satu dari minor bujur sangkar r x r tidak sama dengan nol sedangkan setiap minor bujur sangkar (r+1) x (r+1), jika ada adalah nol. Matriks nol disebut mempunyai rank nol (0)

Contoh :

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ maka matriks A mempunyai rank r = 2

karena nilai determinan dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$ sedangkan

nilai determinan A = $|A| = 0$

Matriks bujur sangkar $A_{(nxn)}$ disebut tak-singular jika ranknya r =n , yaitu jika $|A| \neq 0$. Jika tidak demikian, A disebut *singular*.

b. TRANSFORMASI ELEMENTER

Operasi-operasi berikut disebut **transformasi elementer** pada suatu matriks tanpa mengubah ordo atau ranknya:

a). Pertukaran baris ke-i dengan baris ke-j dinyatakan $H_{ij;}$ Pertukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j dinyatakan $K_{ij;}$

b). Perkalian setiap elemen baris ke-i dengan suatu skalar k yang tidak nol, dinyatakan dengan $H_i(k)$; Perkalian setiap elemen kolom ke-i dengan suatu skalar k yang tidak nol, dinyatakan dengan $K_i(k)$;

c). Penambahan elemen-elemen baris ke-i dengan k kali elemen-elemen padanannya dari baris ke-j, dengan k suatu skalar, dinyatakan dengan $H_{ij}(k)$; Penambahan elemen-elemen kolom ke-i dengan k kali elemen-elemen padanannya dari kolom ke-j, dengan k skalar, dinyatakan dengan $K_{ij}(k)$;

Transformasi H disebut **transformasi elementer baris**, dan transformasi K disebut **transformasi elementer kolom**.

c. MATRIKS SETARA

Dua matriks A dan B disebut **setara**, A ~ B, jika yang satu diperoleh dari yang lainnya melalui serangkaiaan transformasi elementer. Matriks setara mempunyai peringkat (*rank*) yang sama.

Contoh :

Penerapan secara berurutan transformasi elementer $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= B$

Karena semua minor bujur sangkar 3 x3 dari B adalah nol sedangkan nilai determinan $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = -17 \neq 0$, maka rank B adalah 2 ; oleh karena itu rank A adalah 2.

6. MENENTUKAN INVERS MATRIKS

a. Dengan Transformasi Elementer

Matriks bujur sangkar $A_{(nxn)}$ yang *tak-singular* mempunyai bentuk normal I_n. Maka untuk menentukan invers matriks A, langkah awalnya menyusun suatu matriks baru yang berbentuk $[A|I_n]$. Kemudian dilakukan transformasi elementer baris sedemikian sehingga matriks A pada matriks baru menjadi I_n. Sedangkan matriks yangs emula I_n setelah dilakukan transformasi elementer baris menjadi invers matriks A (A^{-1}).

Contoh :

Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

tentukan invers A (atau A^{-1}).

Penyelesaian :

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{31}(-2)]{H_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_{12}(-3)]{H_{32}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_3(1/7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_{13}(10)]{H_{23}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/7 & -11/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Jadi invers dari matriks A atau A^{-1} adalah :

$$\begin{bmatrix} -2/7 & -11/7 & 10/7 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

b. Menentukan Invers Matriks Dengan Adjoint

Misalkan A matriks bujur sangkar dengan $A = [a_{ij}]$ dengan i = 1, 2, 3, …, n dan j = 1, 2, 3, …, n. Apabila kofaktor dari unsur a_{ij} ditulis dengan A_{ij} adalah : $(-1)^{i+j} M_{ij}$ maka Adjoint matriks A adalah matriks

$$\text{adj}(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

dengan A_{ij} adalah kofaktor dari unsur a_{ij} . Matriks invers A dapat dicari dengan persamaan sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

dengan: adj (A) = adjoint matriks A yang akan dicari inversnya

$|A| =$ nilai determinan dari matriks A

Sebagai akibatnya suatu matriks dapat ditentukan inversnya bila dan hanya bila nilai determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol atau $|A| \neq 0$.

Contoh :

Jika diketahui suatu matriks A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan adj(A) dan A^{-1}.

Penyelesaian :

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 28 - 30 = -2$; $A_{12} = 5$ $A_{13} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 7 - 4 = 3$; $A_{21} = -11$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 6 = 1$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 18 - 8 = 10$; $A_{32} = -4$; $A_{33} = 1$

Maka adj (A) adalah $\begin{bmatrix} -2 & -11 & 10 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nilai determinan dari A (dicari dengan Aturan Sarrus) :

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= (28 + 36 + 10) - (16 + 30 + 21)$$
$$= 7$$

Sehingga invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & 10 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2/7 & -11/7 & 10/7 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Soal-soal Latihan

1. Manakah yang merupakan invers satu sama lain?

   a. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

   b. $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   c. $E = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   d. $G = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ -\frac{5}{32} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2. Selidiki apakah matriks – matriks berikut memiliki invers atau tidak, jika ya tentukan inversnya.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

7. SISTEM PERSAMAAN LINIER

Sistem persamaan linier adalah suatu himpunan yang anggotanya terdiri dari persamaan-persamaan linier. Pandang sistem m persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = h_3 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m
\end{array}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)
$$

dengan $a_{ij} \in R$; i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, … , n

Penyelesaiaan sistem tersebut adalah diperolehnya harga-harga $x_1, \ldots, x_n$ dengan $x_i \in R$; i = 1, 2, … , n yang memenuhi m persamaan linier diatas.

Apabila sistem persamaan (1) di atas mempunyai penyelesaiaan maka disebut sistem konsisten. Sedangkan apabila tidak mempunyai penyelesaian disebut sistem inkonsisten. Suatu sistem konsisten kadang-kadang mempunyai penyelesaian tunggal atau kadang-kadang mempunyai penyelesaiaan sebanyak tak berhingga.

Apabila dalam sistem persamaan (1) di atas, setiap $h_i = 0$ maka persamaan tersebut dinamakan *sistem persamaan linier homogen;* sedangkan bila terdapat $h_i \neq 0$, maka sistem persamaan (1) disebut *sistem persamaan linier non-homogen*.

Suatu sistem persamaan linier seperti yang dinyatakan dalam persamaan (1) di atas, dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linier lain yang ekuivalen bila sistem tersebut diubah/ditransformasikan dengan cara :

(a). menukar letak dua persamaan.
(b). mengadakan satu persamaan linier dengan konstanta $k \neq 0$.
(c). menambah suatu persamaan linier dengan k kali persamaan linier yang lain.

Penyelesaian Dengan Matriks

Sistem persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk simbol adalah $A \,.\, X = H$

dengan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien

$X = [\, x_1, x_2, x_3, \dots , x_n]$ adalah matriks dari bilangan yang tidak diketahui.

$H = [\, h_1, h_2, h_3, \dots , h_m]$ adalah matriks konstanta

Matriks lengkap dari sistem persamaan linier tersebut adalah sebagai berikut

$$[AH] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix}$$

Terlihat bila transformasi elementer dilakukan pada [AH], maka sistem persamaan linier yang timbul akan ekuivalen dengan sistem persamaan (1). Dalam sistem A . X = H, bila matriks [AH] dibawa ke bentuk kanonik [CK] maka sistem persamaan C . X = K ekuivalen dengan A X = H. Ini berarti penyelesaian persamaan C X = K juga merupakan penyelesaian persamaan A . X = H sebaliknya.

Sifat – sifat :

a. Sistem A . X = H terdiri atas m persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui mempunyai penyelesaian bila dan hanya bila r(A) = r (AH).
b. Bila sistem A . X = H konsisten dengan r(AH) = r(A) < n, maka (n-r) bilangan tak diketahui bisa dipilih sedemikian hingga matriks koefisien r bilangan tak diketahui yang tersisa mempunyai rank r. Bila (n-r) bilangan tak diketahui sudah dipilih sembarang maka r bilangan tak diketahui yang lain tertentu dengan tunggal.

SISTEM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Pandang sistem persamaan linier homogen

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = h_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Jelaslah karena $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m$ maka r (A) = r (AH).

Ini berarti sistem homogen selalu mempunyai penyelesaian, yaitu penyelesaiaan nol atau trivial, X = [0, 0, … , 0]. Dipunyai beberapa sifat sebagai berikut :

a. Bila r (A) = n, maka sistem hanya mempunyai penyelesaiaan trivial
b. Bila r (A) < n, maka sistem juga mempunyai penyelesaian non-trivial selain penyelesaian trivial.

Oleh karena sistem linier homogen ini jarang ditemui dalam konsep-konsep teknik elektro maka tidak akan dibahas lebih lanjut.

SISTEM PERSAMAAN LINIER NON HOMOGEN

Berdasarkan sifat-sifat diatas sistem persamaan linier non-homogen mempunyai penyelesaian bila r(A) = r(AH). Bila sistem konsisten, maka penyelesaian dpat tunggal atau tak berhingga banyak. Terdapat beberapa cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linier non-homogen ini. dalam diktat ini hanya akan dibahas empat cara dari beberapa cara tersebut.

Adapun keempat cara itu adalah sebagai berikut :

a. Aturan Cramer
b. Invers matriks
c. Metode Eliminasi Gauss
d. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

a. Aturan Cramer

Dari sistem persamaan linier (1) yang telah dituliskan dalam bentuk matriks lengkap, yaitu A X = H. Untuk menyelesaiakan sistem persamaan tersebut dalam aturan Cramer dipakai persamaan sebagai berikut :

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

dengan X_i = bilangan yang tidak diketahui ke-i

$|A_i|$ = nilai determinan dari A (matriks koefisien) yang kolom ke-i sudah diganti dengan matriks H atau matriks konstanta.

$|A|$ = nilai determinan matriks A.

Sebagai akibatnya suatu sistem persamaan linier dapat diselesaikan apabila nilai determinan atau |A| ≠ 0 (tidak sama dengan nol).

Contoh :

Diketahui suatu sistem persamaan sebagi berikut :

2x + 8y + 6z = 20

4x + 2y – 2z = -2

3x − y + z = 11

tentukan harga x, y, dan z

***Penyelesaian*:**

Sistem persamaan dalam bentuk matriks :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}}$$

Dihitung nilai determinan dari matriks A

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -140$$

Terlihat bahwa A $\neq 0$, sehingga dapat digunakan aturan Cramer untuk menentukan x, y, dan z.

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -280 \qquad |A_2| = \begin{bmatrix} 2 & 20 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 3 & 11 & 1 \end{bmatrix} = 140$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 11 \end{bmatrix} = -560$$

Dari hasil-hasil tersebut maka diperoleh harga-harga sebagai berikut :

X_1= x = $\dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-280}{-140} = 2$ X_2= y = $\dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{140}{-140} = -1$ X_3= z = $\dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{-560}{-140} = 4$

b. Metode Invers Matriks

Bila $|A| \neq 0$ maka A^{-1} ada, dari bentuk matriks lengkap suatu sistem persamaan:

$$A \; X = H$$

maka X dapat dicari dengan langkah-langkah berikut, kedua ruas dikalikan dengan invers A (A^{-1}) sehingga diperoleh bentuk berikut:

$\underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1} H$ sehingga diperoleh $I X = A^{-1} H$ atau $X = A^{-1} H$

Jadi $X = A^{-1} H$ merupakan penyelesaiaan sistem persamaan tersebut.

<u>Contoh</u> :

Diketahui suatu sistem persamaan sebagai berikut :

$2x + 3y + z = 9$

$x + 2y + 3z = 6$

$3x + y + 2z = 8$

tentukan harga x, y, dan z.

Penyelesaian **:**

Determinan matriks koefisien adalah :

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 18$$

hal ini berarti sistem persamaan tersebut dapat dicari penyelesaiannya

Dengan menggunakan adjoint, invers matriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh harga X,

$$X = A^{-1}H$$

$$X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Jadi harga x, y, dan z masing-masing adalah : $\begin{bmatrix} \frac{35}{18} & \frac{29}{18} & \frac{5}{18} \end{bmatrix}$

c. Metode Eliminasi Gauss

Penggunaan metode Eliminasi Gauss dalam pencarian penyelesaian sistem persamaan (1), dipakai langkah-langkah sebagai berikut :

1. Dari sistem persamaan (1) yang telah dituliskan dalam bentuk matriks, A X = H, dibentuk matriks gabungan dari matriks koefisien (A) dan matriks konstanta (H). Sehingga diperoleh matriks [AH]
2. Bagian matriks A dibentuk menjadi matriks segitiga atas dengan menggunakan transformasi elementer.
3. dari hasil langkah ke-2 dihitung harga-harga variabel yang diinginkan.

<u>Contoh</u> :

Diketahui sistem persamaan sebagai berikut :

2x + 3y + 4z =7

4x + 3y + z = 11

x + 2y + 4z = 4

tentukan nilai x, y, dan z

Penyelesaian :

Dibentuk suatu matriks gabungan dari matriks koefisien dan matriks konstanta, diperoleh:

$$[AH] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$ dengan transformasi elementer bagian A dijadikan matriks segitiga atas

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}(-2)]{H_{21}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -15 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

telah diperoleh matriks segitiga atas untuk bagian A dari matriks [A H].

Dari bentuk terakhir (matriks 1) di atas, dapat diinterpretasikan sebagai berikut, mulai dari baris yang terakhir kemudian naik baris demi baris sampai baris pertama diperoleh:

(i). $0x + 0y - z = 0 \Rightarrow$ nilai $z = 0$

(ii). $0x + y - 3z = 1 \Rightarrow y - 3(0) = 1 \Rightarrow$ nilai $y = 1$

(iii). $x + 2y + 4z = 4 \Rightarrow x + 2(1) + 4(0) = 4 \Rightarrow$ nilai $x = 2$

Jadi nilai x, y, dan z masing-masing adalah 2, 1, dan 0

d. METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Metode Eliminasi Gauss-Jordan ini hampir sama dengan Eliminasi Gauss, hanya saja pada langkah ke-2 matriks A dibentuk menjadi matriks Identitas (I).

Contoh :

Diketahui sistem persamaan sebagai berikut :

$r + 2s - t = 2$

$-r + s + 2t = 7$

$2r - s + t = 3$

tentukan nilai r, s, dan t

Penyelesaian :

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}\ (-2)]{H_{21}\ (1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(\frac{1}{3})}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[H_{32}\,(5)]{H_{21}\,(-2)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & 14 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{H_3\left(\frac{3}{14}\right)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\xrightarrow[H_{32}\,(5)]{H_{21}\,(-2)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

telah diperoleh bentuk matriks identitas untuk bagian A dari matriks [A H]. Sehingga bentuk terakhir ini dpaat diartikan sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

kalau ruas kiri dikalikan dan mengingat sifat kesamaan dua buah matriks maka akan diperoleh nilai-nilai dari x, y, dan z masing-masing adalah 1, 2, dan 3.