Mata Kuliah: Matematika Kode: TKF 201	Topik: Matriks Dan Sistem Persamaan Linier	MAT 03

Kompetensi :

Dapat menerapkan konsep-konsep matriks dan sistem persamaan linier dalam mempelajari konsep-konsep keteknikan pada mata kuliah – mata kuliah program studi teknik elektro.

A. MATERI PERKULIAHAN

1. Definisi Matriks

Suatu matriks berukuran m x n atau matriks m x n adalah suatu jajaran bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom. Matriks tersebut ditulis dalam bentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam menyatakan suatu matriks biasanya digunakan huruf kapital atau huruf besar dalam susunan Alphabet misal: A, B, dan C. Sedangkan dalam menyatakan unsur atau elemen atau anggota digunakan huruf kecil dalam susunan Alphabet, misal: a, b, dan c. Dalam menunjukkan sebuah matriks kadang kala digunakan sepasang tanda kurung; ( ), dan garis tegak ganda; $\|\quad\|$. Selanjutnya dalam diktat ini kan dipakai penulisan sepasang kurung siku. Pada saatnya matriks (1) akan disebut " matriks $[a_{ij}]$, m x n" atau " matriks A = $[a_{ij}]$, m x n ". Bilamana ukuran (ordo) sudah dikembangkan, cukup dituliskan " matriks A" saja.

Fungsi a_{ij} menyatakan unsur atau elemen dari suatu matriks pada baris ke-i kolom ke-j, dimana $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$. Banyaknya baris dan kolom menyatakan ukuran (ordo) dari suatu matriks.

2. Beberapa Jenis Matriks

a. Matriks Bujur Sangkar

Definisi: Suatu matriks dikatakan matriks bujur sangkar jika banyaknya baris dan kolom dari matriks tersebut sama.

Dalam matriks bujur sangkar elemen-elemen a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} disebut elemen diagonal. Sedangkan jumlah elemen dalam diagonal utama matriks bujur sangkar A disebut *trace* A.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

». elemen diagonal matriks A= 1, 4, 5
». trace A = 1 + 4 + 5

b. Matriks Segitiga

Definisi: Suatu matriks bujur sangkar yang mana semua elemen di bawah atau di atas diagonal adalah nol (0).

Dari keadaan ini diperoleh dua bentuk matriks segitiga, yaitu :

a). Matriks segitiga atas, jika elemen-elemen di bawah diagonal semuanya nol.
b). Matriks segitiga bawah, jika elemen-elemen di atas diagonalnya semuanya nol.

Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Dari kedua matriks tersebut maka B adalah matriks segitiga atas sedangkan matriks C adalah matriks segitiga bawah.

c. Matriks Diagonal

Definisi: Suatu matriks bujur sangkar yang mana semua elemen di bawah dan di atas diagonal adalah nol (0)

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Skalar

Definisi: Suatu matriks diagonal yang semua elemennya sama.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Identitas/Satuan

Definisi: Suatu matriks skalar yang elemen-elemennya satu (1). Dengan kata lain suatu matriks diagonal yang semua elemennya adalah satu (1).

Matriks identitas ini biasanya dinotasikan dengan $I_{(nxn)}$ atau I_n. Matriks identitas ini dalam aljabar matriks mempunyai peranan yang sama dengan bilangan 1 dalam aljabar biasa.

Contoh :

$$I_{(4x4)} = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{(3x3)} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I_{(5x5)} = I_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Matriks Transpose

Definisi: Suatu matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris menjadi kolom dari sutu matriks yang diketahui.

Apabila diketahui suatu matriks A berukuran (mxn) maka matriks transpose A biasanya dinotasikan dengan A^t atau A′ atau A^T dengan ukuran (n x m) untuk selanjutnya dalam diktat ini digunakan notasi A^T.

<u>Contoh</u> : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat matriks transpose :
(a). $(A + B)^T = A^T + B^T$
(b). $(AB)^T = B^T A^T$
(c). $A^{TT} = (A^T)^T = A$

g. Matriks Invers

Definisi: A adalah suatu matriks bujur sangkar. B adalah invers dari matriks A ($B = A^{-1}$).

$$\text{Jika } AB = A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

Dengan I adalah matriks identitas, sedangkan matriks invers dapat dicari dengan beberapa cara.

<u>Contoh</u> :

Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka matriks invers dari A atau $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

karena $A\,A^{-1} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

h. Matriks Nol

Definisi : Matriks yang semua elemennya nol. Bilamana A suatu matriks nol dan tidak terdapat keraguan mengenai ukurannya, dapat dituliskan A = 0 sebagai pengganti komposisi *m x n* dari elemen-elemen nol.

i. Matriks Simetri dan Skew-simetri

Definisi: Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan *simetri* jika $A^T = A$ dan *skew-simetri* jika $A^T = -A$.

<u>Contoh</u> :

(1). $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad C^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Matriks C merupakan matriks simetri.

(2). $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks A merupakan matriks skew-simetri.

j. Matriks Kompleks Sekawan

Definisi: Jika semua unsur a_{ij} dari suatu matriks A diganti dengan kompleks sekawannya $\bar{a}_{ij}$, maka matriks yang diperoleh dinamakan kompleks sekawan dari A dan dinyatakan dengan $\bar{A}$.

<u>Contoh</u> : Bilamana $A = \begin{bmatrix} 1+2j & j \\ 3 & 2-3j \end{bmatrix}$ maka $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2j & -j \\ 3 & 2+3j \end{bmatrix}$

3. Operasi Aljabar Pada Matriks

a. Kesamaan dua matriks

Definisi: Dua matriks A dan B disebut sama, jika :

(i). A dan B sejenis (mempunyai ukuran yang sama)

(ii). Setiap unsur yang seletak sama. Jadi jika $A_{(mxn)} = B_{(pxq)}$ maka: (a) m = p dan n = q, (b). $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i an j.

<u>Contoh</u> : $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dari kedua matrik tersebut maka matriks A dan matriks B merupakan matriks yang *sama* karena ukurannya sama dan unsur yang seletak sama.

b. Penjumlahan matriks

Definisi: Jumlah dua buah matriks A dan B yang sejenis adalah sebuah matriks C yang sejenis pula, dengan elemen-elemen C_{ij} dimana terdapat hubungan

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

<u>Sifat-sifat penjumlahan matriks</u>:
(a). A + B = B + A
(b). A + (B + C) = (A + B) + C
(c). A + Z = A   Z adalah matriks yang semua unsurnya 0 ditulis 0 atau $0_{(mxn)}$. Z disebut matriks nol.

<u>Contoh</u> :

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

maka $A + B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

c. Pengurangan matriks

Definisi: Jika $A = [a_{ij}]$, dan $B = [b_{ij}]$ berukuran sama atau sejenis, selisih dari A dan B dinyatakan sebagai $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.

<u>Contoh</u> :

Diiketahui: $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

maka $B - A = \begin{bmatrix} 6 & -8 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$

d. Perkalian suatu matriks dengan suatu bilangan

Definisi: Jika A = $[a_{ij}]$ dan λ adalah suatu bilangan (skalar) hasil kali A dan λ sebagai λ A = A λ = $[\lambda \; a_{ij}]$.

<u>Contoh</u> :

Misal diketahui sutau bilangan α = 5 dan B = $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\alpha \text{ B} = \begin{bmatrix} 35 & -25 & 0 \\ 5 & 5 & 20 \\ -20 & -20 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Sifat-sifatnya</u>:

Jika diketahui α dan β adalah bilangan (skalar) serta A dan B dianggap sejenis, maka berlaku :

(a). α (A + B) = αA + αB

(b). (α + β)A = αA + βA

(c). α(βA) = α β A

(d). 0 A = 0 (matriks nol sejenis A)

(e). 1 A= A

(f). (-1) = - A

e. Perkalian matriks

Definisi: Jika A =$[a_{ij}]$ adalah suatu matriks berukuran *m x n* dan B = $[b_{ij}]$ adalah suatu matriks berukuran *n x p* maka hasilkali dari matriks A dan B (A.B atau AB) sebagai matriks C = $[c_{ij}]$ dengan:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \text{ dan C berukuran } m \times p$$

Perhatikanlah bahwa perkalian matriks didefinisikan jika dan hanya jika banyaknya kolom dari matriks pertama (A) sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua (B). Matriks yang demikian ini sering dinamakan *conformable.*

<u>Contoh</u> :

Jika diketahui: B = $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ dan A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka hasil dari B x A adalah sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 19 & 22 \\ -7 & -25 & -20 \end{bmatrix}$$

Hasil dari B x A

Sifat-sifatnya :

Diasumsikan A, B, dan C adalah matriks yang sesuai untuk penjumlahan dan perkalian, maka berlaku :

(a). (AB)C = A(BC)

(b). A(B + C) = AB + AC

(c). (A + B) C = AC + BC

4. Determinan Matriks Bujur Sangkar

Misalkan matriks A yang disajikan dalam (1) adalah suatu matriks bujur sangkar, maka A dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang dinyatakan oleh :

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dots (1)$$

yang dinamakan *determinan* dari A dengan ukuran n, ditulis det(A).

Determinan suatu matriks bujur sangkar *berordo n* disebut pula dengan *determinan* berordo n. Khusus untuk determinan ordo satu (memiliki satu elemen saja) maka nilai determinannya merupakan anggota/elemen yang ada dalam determinan itu sendiri, misalnya diketahui determinan ordo 1 yaitu: A = (–31) maka nilai determinannya adalah –31.

a. Determinan Berordo Dua Dan Tiga

Dari bentuk matriks (1) untuk kasus dimana n = 2 dan n = 3, dipunyai bentuk determinan sebagai berikut.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Untuk A, nilai determinannya dapat dihitung dengan cara :

$$|A| = \det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Contoh :

(a) Diketahui $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan A.

Nilai det(A) atau $|A|$ adalah (5x6) – (3x4) = 30 –12 =18

(b) Diketahui $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan B.

Nilai det(B) atau $|B|$ adalah (–3x6) – (–7x5) = –18 – (–35) =17

Sedangkan untuk B, nilai determinannya dapat dihitung dengan menggunakan suatu metode yang disebut ATURAN SARRUS. Yaitu memperluas determinan tersebut dengan menambahkan dua kolom pertama setelah kolom terakhir.

$$|B| = \det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$= [(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32})] - [(a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) + (a_{32} \times a_{23} \times a_{11}) + (a_{33} \times a_{21} \times a_{12})]$$

Contoh :

(1). Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan A.

Nilai determinan A atau $|A|$ = (20 + 20 + 18) – (16 +15 +30) = -3

(2). Diketahui $C = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan B

Nilai determinan B atau $|B|$ = (21 + 80 + (-16)) – (24 + (-102) + (-10))

= 85 + 136 =221

b. Determinan Berordo n

Pandang bentuk determinan matriks bujur sangkar berordo n berikut ini,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

untuk menentukan nilai determinan A tersebut digunakan metode Uraian Laplace, dalam metode ini terdapat dua macam cara yaitu:

(1). dengan menjabarkan atau menguraikan determinan menurut baris ke-i:

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij}$$

(2). dengan menjabarkan/menguraikan determinan menurut kolom ke-j:

$$|A| = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij}$$

<u>keterangan </u>:

i. a_{ij} = komponen determinan pada baris ke-i kolom ke-j
ii. M_{ij} = Minor dari a_{ij} (determinan berordo n-1 yang dibentuk dengan menghapus baris dan kolom yang memuat a_{ij})
iii. $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$ = kofaktor dari a_{ij}.
iv. Dalam menentukan baris atau kolom yang akan dipakai sebagai dasar dalam penjabaran, dilihat elemen-elemen yang menyusunnya. Dipilih baris atau kolom yang elemennya menyederhanakan perhitungan. Kalau ada baris atau kolom yang memuat nol paling banyak, baris atau kolom itulah yang dipilih. Jika elemen-elemnnya tidak ada yang nol maka pemilihan baris/kolom bebas.

Sebelum pembahasan tentang pencarian nilai determinan dilanjutkan, kita lihat dahulu contoh dari pengertian-pengertian tersebut diatas.

<u>Contoh </u>:

(1). Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ tentukan M_{22} dan kofaktor dari a_{22}.

Penyelesaian :

•›. M_{22} = minor dari a_{22} berarti baris ke-2 dan kolom ke-2 dihapus sehingga didapat suatu matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

•›. Kofaktor dari $a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(2). Dari matriks no. (1) tentukan nilai determinannya.

Penyelesaian:

•›. Menentukan baris atau kolom yang akan dijabarkan. Misal ***dipilih baris ke-1***, maka rumus nilai determinannya menjadi : $|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, M_{1j}$

•›. Menghitung nilai determinan, dijabarkan dulu untuk tiap-tiap j (dari j = 1 sampai dengan j = 4), sebagai berikut :

Untuk j = 1

$(-1)^{1+1}\, a_{11}\, M_{11} = 1 \,.\, 3 \,.\, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$= 3 \,.\, (-18) = -54$

Untuk j = 2

$(-1)^{1+2}\, a_{12}\, M_{12} = -1 \,.\, 4 \,.\, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$= -4 \,.\, (-69) = 276$

Untuk j = 3

$(-1)^{1+3}\, a_{13}\, M_{13} = 1 \,.\, 6 \,.\, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= 6 \,.\, (-12) = -72$

Untuk j = 4

$(-1)^{1+4}\, a_{14}\, M_{14} = -1 \,.\, 1 \,.\, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$= -1 \,.\, (15) = 15$

Jadi nilai determinan dari A adalah: det(A) = (-54) + 276 + (-72) + (-15) = 135

<u>Sifat-sifat determinan matriks bujur sangkar</u> :

Untuk setiap determinan matriks bujur sangkar berordo sembarang (n = 1, 2, 3, …) berlaku:

(a). Jika terdapat satu baris/kolom semua elemennya nol maka nilai determinannya nol.

(b). Jika terdapat dua buah baris/kolom mempunyai elemen sama atau kelipatannya maka nilai determinannya sama dengan nol.

(c). Jika dua buah baris/kolom saling ditukarkan maka nilai determinannya berlawanan tanda (negatif) dari nilai determinan semula.

(d). Jika terdapat suatu baris/kolom tiap-tiap elemennya dikalikan dengan suatu bilangan ***k*** maka nilai determinannya adalah ***k*** kali nilai determinan semula.

(e). Jika elemen-elemen suatu baris/kolom dijumlahkan dengan ***k*** kali elemen-elemen baris/kolom yang seletak maka nilai determinannya tidak berubah.

Soal-soal Latihan Campuran

1. Diketahui matriks A= $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 & -7 \\ -5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

   a. Sebutkan ordo/ukuran dari matriks A tersebut.

   b. Matriks A diatas, memiliki baris sebanyak ...... dan kolom sebanyak ......

   c. Dari matriks di atas jawablah pertanyaan berikut dengan mengisi titik-titik yang telah tersedia.

a_{12} = ...	a_{13} = ...	a_{14} = ...
a_{21} = ...	a_{23} = ...	a_{24} = ...
a_{33} = ...	a_{34} = ...	a_{31} = ...

2. Berikan contoh matriks persegi ordo 3 dari matriks berikut!

   a. Matriks skalar

   b. Matriks segitiga bawah

   c. Matriks segitiga atas.

   d. Matriks diagonal

3. Tulislah transpose dari matriks berikut!

a. A = $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c. A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

d. A = (1 2 3)

4. Tentukan x, y, dan z jika diketahui A = B

a. A= $\begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 2y \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} y & -z-1 \\ y & 8 \end{bmatrix}$

b. A = $\begin{bmatrix} x+1 & x+2y \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & z \\ 0 & 3x-y \end{bmatrix}$

5. Tentukan x, y, dan z dari persamaan berikut!

$$\begin{bmatrix} y+x & 1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \\ 1 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin 90^0 & 0 \\ \tan\theta^0 & \sin 30^0 & 1 \\ 1 & \tan 30^0 & x-y \end{bmatrix}$$

6. Untuk matriks: P = $\begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ dan Q $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan x dan y jika P^t = Q!

7. Diketahui tiga buah matriks berikut: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukan :

a. (A + C) – (A + B)

b. A + B – C

c. A – B + C

d. A – B – C

8. Jika diketahui tiga buah matriks berikut: P = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; Q = $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

$R = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ maka tentukan hasil dari: a. P + Q – R b. P – Q – R

9. Carilah matriks X jika :

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

b. $X + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $X - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} - X$

10. Tentukan p, q, r, dan s jika persamaannya berikut ini!

$$3\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 6 \\ -1 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & p+q \\ r+s & 2 \end{pmatrix}$$

11. Jika $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, *tentukan* $(x + y)$!

12. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 3x - 4I$.

Tentukan f(A) jika $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan I : matriks identitas sejenis dengan A

13. Diketahui fungsi $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$;

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukan berikut ini!

a. f(A,B)

b. f(B,A)

c. Apakah f(A,B) = f(B,A)?

14. Jika $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 3x-2 \\ x & 5 \end{pmatrix}$ mempunyai determinan yang sama, tentukan nilai x!

15. Tentukanlah nilai determinan matriks-matriks berikut ini.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} -\cot an\alpha & -\cos ec\alpha \\ \cos ec\alpha & \cot an\alpha \end{vmatrix}$

16. Tentukanlah harga p jika nilai determinan A = 1 dan B = 0, dari matriks berikut ini.

a. A = $\begin{pmatrix} 2p & p+1 \\ 3 & p+2{,}5 \end{pmatrix}$

b. B = $\begin{pmatrix} 2p & -3 \\ p-1 & p-1 \end{pmatrix}$

17. Tentukanlah nilai determinan matriks-matriks berikut ini.

a. F = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. H = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. G = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

d. J = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$