LAGRANGE MULTIPLIERS

Metode untuk menentukan harga/nilai maksimum atau minimum relatif dari suatu fungsi yang dibatasi oleh suatu kondisi (*constrain conditions*).

Misal: Fungsi yang akan dicari maksimum dan/atau minimum adalah: **$F(x,y,z)$**.

Sedangkan fungsi kendala/hambatan/pembatas adalah: **$\phi(x,y,z)=0$**

Prosedur yang dilakukan adalah menyusun fungsi bantu yang dinyatakan sebagai berikut:

$$G\,(x,y,z) \equiv F(x,y,z) + \lambda\,\phi(x,y,z)$$

Syarat perlu adanya harga maksimum dan/atau minimum adalah:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Dalam hal ini parameter λ yang bebas dari x, y, dan z dinamakan ***Lagrange Multiplier***

Permasalahan di atas dapat diperluas untuk fungsi yang memiliki variabel bebas lebih banyak.

Misal: Fungsi yang akan dicari maksimum dan/atau minimum adalah:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Sedangkan fungsi kendala/hambatan/pembatas adalah:

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)=0; \quad \phi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)=0; \quad \phi_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)=0;$$

$$\phi_4(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)=0; \ \dots ; \ \phi_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)=0$$

Prosedur yang dilakukan adalah menyusun fungsi bantu yang dinyatakan sebagai berikut:

$$G\,(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 + \lambda_4\phi_4 + \ \dots \ + \lambda_k\phi_k$$

Syarat perlu adanya harga maksimum dan/atau minimum adalah:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0 \qquad \dots \qquad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

Dalam hal ini parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_k$ yang bebas dari x, y, dan z dinamakan ***Lagrange Multipliers***

Sebagai contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode ***Lagrange Multipliers***

1. Dipunyai suatu balok tegak tanpa tutup, volumenya = 32 m^3. Tentukan dimensinya sehingga bahan yang diperlukan untuk membuatnya ***sekecil-kecilnya***. (catatan: *ketebalan bahan diabaikan*)
2. Terdapat tiga buah bilangan positif, hasil penjumlahan ketiga buah bilangan itu adalah 150. Tentukan bilangan-bilangan itu sehingga jumlah semua perkalian pasangan dua bilangan adalah ***terbesar***.
3. Sebuah perusahaan berencana membuat suatu penampung cairan dengan volume 2000 m^3 yang berbentuk tabung tegak (silinder). Tentukan dimensinya sehingga bahan yang diperlukan ***sekecil-kecilnya***. (catatan: *ketebalan bahan diabaikan*)
4. Tentukan ***harga maksimum*** dan/atau ***minimum*** dari $\mathbf{x^2 + y^2}$ yang memenuhi persamaan: $\mathbf{3x^2 + 6y^2 + 4xy = 140}$

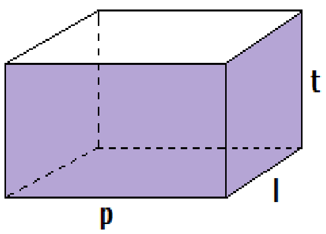
Pemecahan dari persoalan di atas:

1. Dari informasi yang diberikan diperoleh,

$$\mathbf{V = p\,.\,l\,.\,t = 32}$$

Fungsi pembatas/ kendala/hambatan, ϕ

Bahan yang diperlukan sekecil-kesilnya berarti harus tahu bentuk dan luas semua permukaan suatu balok, karena ada pernyataan *sekecil-kecilnya* maka ini merupakan permasalahan **MINIMUM**



Dari ilustrasi gambar di samping, nampak bahwa balok tegak memiliki enam (6) sisi, tetapi karena diketahui tanpa tutup maka sisi yang dimiliki hanya lima (5) buah, maka seluruh *luas permukaan balok tanpa tutup* (disimbolkan dengan **S**) dapat dihitung sebagai berikut:

$$\mathbf{S = pl + 2\,pt + 2\,lt}$$

Fungsi yang akan dicari harga minimumnya, F

Langkah selanjutnya adalah menyusun **fungsi bantu**, dari data yang dinyatakan dalam soal tersebut maka fungsi bantunya adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{G\,(p,l,t) \equiv pl + 2\,pt + 2\,lt + \lambda\,(p\,l\,t - 32)}$$

Selanjutnya mengevaluasi ***syarat perlu*** adanya harga MINIMUM untuk permasalahan yang diajukan, yaitu dengan menentukan derivatif parsial G terhadap semua variabel bebas yang ada.

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial l} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Diperoleh,

$$(i).\ \frac{\partial G}{\partial p} = l + 2t + \lambda lt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(l+2t)}{lt}$$

$$(ii).\ \frac{\partial G}{\partial l} = p + 2t + \lambda pt = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(p+2t)}{pt}$$

$$(iii).\ \frac{\partial G}{\partial t} = 2p + 2l + \lambda pl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(2p+2l)}{pl}$$

Dari harga-harga λ (persamaan no. i dan no. ii) tersebut, diperoleh

$$\frac{-(\boldsymbol{l}+2\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{lt}} = \frac{-(\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{pt}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{pl} + 2\boldsymbol{pt} = \boldsymbol{pl} + 2\boldsymbol{lt} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{l}$$

Selanjutnya dari persamaan no. i dan no. iii di atas, diperoleh

$$\frac{-(\boldsymbol{l}+2\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{lt}} = \frac{-(2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{l})}{\boldsymbol{pl}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{pl} + 2\boldsymbol{pt} = 2\boldsymbol{pt} + 2\boldsymbol{lt} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{t}$$

Hasil-hasil tersebut kemudian disubstitusikan ke **fungsi kendala/pembatas/hambatan**, sehingga di peroleh:

$$\boldsymbol{p}\ .\ \boldsymbol{p}\ .\ \frac{\boldsymbol{p}}{2} = 32 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}^3 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p} = 4 \quad \Rightarrow \boldsymbol{l} = 4\ \ \&\, t = 2$$

Jadi dimensi dari balok tersebut adalah panjang = lebar = 4 m dan tingginya = 2 m.

Fungsi pembatas, ϕ

2. Misal: bilangan I = **a**, bilangan II = **b**, dan bilangan III = **c**

Dari informasi yang diberikan, dipunyai persamaan: **a + b + c = 150**

Akan dicari besarnya **a**, **b**, **c** sehingga **a.b + a.c + b.c** ***hasilnya terbesar***

(artinya soal ini merupakan permasalahan ***Maksimum***)

Fungsi yang akan dicari harga minimumnya, F

Sehingga fungsi bantunya adalah:

$$\mathbf{G\ (a,b,c) \equiv a.b + a.c + b.c + \lambda\ (a+b+c - 150)}$$

Kemudian dicari:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial c} = 0$$

Diperoleh,

$$(i).\ \frac{\partial G}{\partial a} = b + c + \lambda = 0 \iff \lambda = -(b + c)$$

$$(ii).\ \frac{\partial G}{\partial b} = a + c + \lambda = 0 \iff \lambda = -(a + c)$$

$$(iii).\ \frac{\partial G}{\partial c} = a + b + \lambda = 0 \iff \lambda = -(a + b)$$

Dari harga-harga λ (persamaan no. i dan no. ii) tersebut, diperoleh

$$-(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

Selanjutnya dari persamaan no. i dan no. iii di atas, diperoleh

$$-(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$$

Kemudian, hasil-hasil tersebut disubstitusikan ke **fungsi kendala/pembatas/ hambatan**, sehingga di peroleh:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \mathbf{150} \iff \mathbf{3}\boldsymbol{a} = \mathbf{150} \iff \boldsymbol{a} = \mathbf{50} \implies \boldsymbol{b} = \mathbf{50}\ \&\ \boldsymbol{c} = \mathbf{50}$$

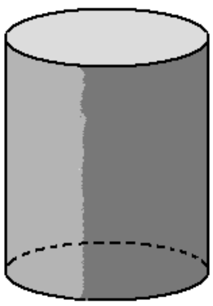
Jadi bilangan-bilangan itu adalah bilangan I = bilangan II = bilangan III = 50.

3. Dari informasi yang diberikan diperoleh,

$$\mathbf{V = \pi \,.\, r^2 \,.\, t = 2000}$$

Fungsi pembatas/ kendala/hambatan, ϕ

Bahan yang diperlukan sekecil-kesilnya berarti harus tahu bentuk dan luas seluruh permukaan suatu silinder, karena ada pernyataan *sekecil-kesilnya* maka ini merupakan permasalahan **MINIMUM**



Dari ilustrasi gambar di samping, *luas permukaan silinder* (disimbolkan dengan **S**) terdiri dari *luas alas*, *luas tutup* dan *luas selimut*. Oleh karena itu permukaan silinder dapat dihitung sebagai berikut:

$$\mathbf{S = \pi \,.\, r^2 + \pi \,.\, r^2 + 2\,\pi\, r\, t}$$

Fungsi yang akan dicari harga minimumnya, F

Sehingga fungsi bantunya adalah:

$$\mathbf{G\ (r,t)\ \equiv\ 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, t + \lambda\ (\pi\, r^2\, t - 2000)}$$

Kemudian dicari:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Diperoleh,

$$(i).\ \frac{\partial G}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi t + \lambda(2\pi r t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(4\pi r + 2\pi t)}{2\pi r t}$$

$$(ii).\ \frac{\partial G}{\partial t} = 2\pi r + \lambda(\pi r^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(2\pi r)}{\pi r^2}$$

Dari harga-harga λ tersebut, diperoleh

$$\frac{-(4\pi r + 2\pi t)}{2\pi r t} = \frac{-(2\pi r)}{\pi r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-(4r + 2t)}{2rt} = \frac{-(2)}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{2r = t}$$

Kemudian, hasil-hasil tersebut disubstitusikan ke **fungsi kendala/pembatas/hambatan**, sehingga di peroleh:

$$\boldsymbol{\pi\, r^2\, 2r\ = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad r^3\ = \frac{1000}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow\ r = 6,83\ \ \&\ \ t = 13,66}$$

Jadi dimensi dari silinder tersebut adalah jari-jarinya = 6,83 m tingginya = 13,66 m.

4. Dari soal tersebut akan menentukan harga maksimum dan/atau minimum dari

Fungsi yang akan dicari harga maks. dan/atau min., F

$$\mathbf{x^2 + y^2}$$

yang memenuhi persamaan:

$$\mathbf{3x^2 + 6y^2 + 4xy = 140}$$

Fungsi kendala, ϕ

Sehingga fungsi bantunya adalah:

$$\mathbf{G\ (r,t)\ \equiv\ x^2 + y^2 + \lambda\ (3x^2 + 6y^2 + 4xy - 140)}$$

Kemudian dicari:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

Diperoleh,

$$(i).\ \frac{\partial G}{\partial x} = 2x + \lambda(6x + 4y) = 0 \iff \lambda = \frac{-2x}{6x + 4y}$$

$$(ii).\ \frac{\partial G}{\partial t} = 2y + \lambda(12y + 4x) = 0 \iff \lambda = \frac{-2y}{12y + 4x}$$

Dari harga-harga λ tersebut, diperoleh

$$\frac{-2x}{6x + 4y} = \frac{-2y}{12y + 4x} \iff \mathbf{2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0} \iff \mathbf{(2x - y)(x + 2y) = 0}$$

$$\mathbf{2x = y} \qquad \mathbf{atau} \qquad \mathbf{x = -2y}$$

Kemudian, hasil-hasil tersebut disubstitusikan ke **fungsi kendala/pembatas/ hambatan**, sehingga di peroleh:

Untuk $\mathbf{2x = y}$

$$\mathbf{3x^2 + 6(2x)^2 + 4x(2x) = 140 \iff 35x^2 = 140 \iff x = 2}$$

$$\mathbf{\Rightarrow y = 4}$$

Sehingga nilai dari $x^2 + y^2$ adalah: 4 + 16 = 20

Untuk $\mathbf{x = -2y}$

$$\mathbf{3(-2y)^2 + 6y^2 + 4(-2y)y = 140 \iff 10y^2 = 140 \iff y = \sqrt{14}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow x = -2\sqrt{14}}$$

Sehingga nilai dari $x^2 + y^2$ adalah: 14 + 56 = 70

Jadi harga maksimumnya adalah 70 dan harga minimumnya adalah 20.