

INTEGRAL LIPAT DUA

created by: *Nur Kholis*

This presentation material adopted from the group below,

- 1. Maskub Abi Mulia**
- 2. Laila Vita**
- 3. Fredy**
- 4. Andhika**
- 5. Bayu**
- 6. Ario Prili**



Integral lipat dua (double integrals)

merupakan integral biasa/tunggal yang hasilnya diintegrasikan kembali

Biasanya dinyatakan sebagai berikut:

$$\int \int f(x, y) dx dy$$

pernyataan diatas disebut dengan **integral lipat dua tak tertentu (indifinite double integrals)**

Pada kondisi lainnya dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

pernyataan diatas disebut dengan **integral lipat dua tertentu (definite triple integrals)** karena tiap-tiap integralnya mempunyai **batas atas** (x_2 dan y_2) dan **batas bawah** (x_1 dan y_1)

Prinsip-prinsip penyelesaian **integral lipat dua sama dengan penyelesaian integral tunggal.**

Dalam setiap pengintegralan prinsipnya sama dengan prinsip integral tunggal yaitu menggunakan :

1. Langsung dari rumus
2. Substitusi Sederhana (pemisalan)
3. Integral Parsial
4. Substitusi Trigonometri
5. Pecahan Bagian



INTEGRAL LIPAT DUA TAK TERTENTU

$$\int \int f(x, y) dx dy$$

Langkah Penyelesaiannya yaitu :

1. Fungsi $f(x, y)$ diintegrasikan terhadap **x** (dengan menganggap *variabel y* konstan)
2. Hasilnya kemudian diintegrasikan terhadap **y** dengan menganggap *variabel x* konstan

Jangan lupa setiap hasil pengintegralan ditambah dengan konstanta sembarang C



Proses tersebut dapat divisualisasikan berikut ini

$$\int \int f(x, y) dx dy$$

Area kuning adalah langkah pertama dan **area hijau** merupakan langkah yang kedua.

Contoh:

Selesaikanlah soal-soal berikut ini:

1. $\iint dx dy$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\iint dx dy &= \int (x + c_1) dy \\ &= (x + c_1)y + c_2 = xy + yc_1 + c_2\end{aligned}$$

2. $\iint \rho \cos \theta d\rho d\theta$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\iint \rho \cos \theta d\rho d\theta &= \int \left(\frac{1}{2}\rho^2 \cos \theta + c_1\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 \sin \theta + \theta c_1 + c_2\end{aligned}$$



INTEGRAL LIPAT DUA TERTENTU

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

Langkah Penyelesaiannya yaitu :

1. Fungsi $f(x, y)$ diintegrasikan terhadap x (dengan menganggap y konstan), hasilnya dihitung nilainya dengan mensubstitusikan batas atas $x = x_2$ dan batas bawah $x = x_1$
2. Hasilnya kemudian diintegrasikan terhadap y dengan batas atas $y = y_2$ dan batas bawah $y = y_1$

Ingat: karena sudah ada batasnya maka tidak perlu ditambah dengan c

Proses tersebut dapat divisualisasikan sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

Area kuning adalah langkah pertama dan **area biru** merupakan langkah yang kedua.

Contoh 1.

Hitunglah $I = \int_1^4 \int_2^6 (x + 4y) dx dy$

Jadi, pertama-tama $(x + 4y)$ diintegrasikan dahulu terhadap x di antara $x = 2$ dan $x = 6$, dengan y untuk sementara dianggap konstan.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \int_2^6 (x + 4y) dx dy \\ &= \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2} + 4xy \right]_2^6 dy \\ &= \int_1^4 \{(18 + 24y) - (2 + 8y)\} dy \\ &= \int_1^4 (16 + 16y) dy \\ &= [16y + 8y^2]_1^4 \\ &= (64 + 128) - (16 + 8) \\ &= 192 - 24 \\ I &= 168 \end{aligned}$$





Terima kasih atas perhatiannya,

Selamat Belajar...

Sukses selalu buat anda semua...

