INTEGRAL LIPAT TIGA

created by:
Nur Kholis

Integral lipat tiga (triple integrals) merupakan integral biasa/tunggal yang hasilnya diintegralkan dan kemudian diintegralkan kembali

Integral lipat tiga ini diyatakan sebagai berikut:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

pernyataan diatas disebut dengan **integral lipat tiga tak tertentu (indifinite triple integrals)**

Dinyatakan juga sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

pernyataan diatas disebut dengan **integral lipat dua tertentu (difinite triple integrals)** dengan **batas atas** (z_2 ; x_2 ; dan y_2)dan **batas bawah** (z_1 ; x_1 ; dan y_1)

Prinsip-prinsip penyelesaian **integral lipat tiga sama dengan penyelesaian integral tunggal**.

Artinya dalam setiap pengintegralan prinsipnya sama dengan prinsip integral tunggal yaitu menggunakan:

1. **Langsung dari rumus**
2. **Subtitusi Sederhana (pemisalan)**
3. **Integral Parsial**
4. **Subtitusi Trigonometri**
5. **Pecahan Bagian**

INTEGRAL LIPAT TIGA TAK TERTENTU

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Langkah Penyelesainnya yaitu :

1. Fungsi $f(x,y,z)$ diintegralkan terhadap x dengan menggangap *variabel lainnya* konstan
2. Hasilnya kemudian diintegralkan terhadap y dengan menggangap *variabel lainnya* konstan
3. Hasil pada langkah 2 kemudian diintegralkan terhadap z dengan menggangap *variabel lainnya* konstan

Jangan lupa setiap hasil pengintegralan ditambah dengan ***konstanta sembarang C***

Proses tersebut dapat divisualisasikan sebagai berikut:

$$\underbrace{\int \underbrace{\int \underbrace{\int f(x, y, z)\, dx}_{1}\, dy}_{2}\, dz}_{3}$$

Area hijau adalah langkah pertama, ***area biru*** adalah langkah kedua, dan ***area coklat*** merupakan langkah yang ketiga.

Contoh

1. $\iiint dx\,dz\,dy$

Penyelesaian:

$$\iiint dx\,dz\,dy = \int\int (x + c_1)\,dz\,dy = \int ((x + c_1)z + c_2)\,dy$$
$$= (x + c_1)\,zy + yc_2 + c_3$$
$$= xyz + zyc_1 + yc_2 + c_3$$

2. $\iiint (xy + yz + xz)\,dy\,dz\,dx$

Penyelesaian:

$$\iiint (xy + yz + xz)\,dy\,dz\,dx = \int\int (\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{2}y^2z + xzy + c_1)\,dz\,dx$$
$$= \int (\tfrac{1}{2}xy^2z + \tfrac{1}{4}y^2z^2 + \tfrac{1}{2}xz^2y + zc_1 + c_2)dx$$
$$= \tfrac{1}{4}x^2y^2z + \tfrac{1}{4}xy^2z^2 + \tfrac{1}{4}x^2z^2y + xzc_1 + xc_2 + c_3$$

INTEGRAL LIPAT TIGA TERTENTU

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Langkah Penyelesainnya yaitu :

1. Fungsi $f(x,y,z)$ diintegralkan terhadap z (dengan menggangap x dan y konstan), dihitung nilainya dengan mensubstitusikan batas atas $z = z_2$ dan batas bawah $z = z_1$
2. Hasilnya kemudian diintegralkan terhadap x, kemudian dihitung nilainya dengan batas atas $x = x_2$ dan batas bawah $x = x_1$
3. Dari hasil langkah 2 diintegralkan kembali ke y kemudian dihitung nilainya dengan batas atas $y = y_2$ dan batas bawah $y = y_1$

Proses tersebut dapat divisualisasikan sebagai berikut:

$$\boxed{\int_{y_1}^{y_2} \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz \;\; 1} \; dx \;\; 2} \; dy \;\; 3}$$

Area hijau adalah langkah pertama, ***area biru*** adalah langkah kedua, dan ***area orange*** merupakan langkah yang ketiga.

Contoh

1. $$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\phi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Penyelesaian:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\phi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho\Big|_0^{\sec\phi} \sin 2\phi \right) d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec\phi \,.\, \sin 2\phi \right) d\phi \, d\theta = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left(-\cos\phi \,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) d\theta = 2\int_0^{\pi} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta \,\Big|$$

$$= 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\theta \,\Big|_0^{\pi} = (2 - \sqrt{2})\pi$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx$$

Penyelesaian:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (4-y^2)-(2x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(4y - 2x^2y - \tfrac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} \right) dx = \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2-x^2)^3}\,dx}$$

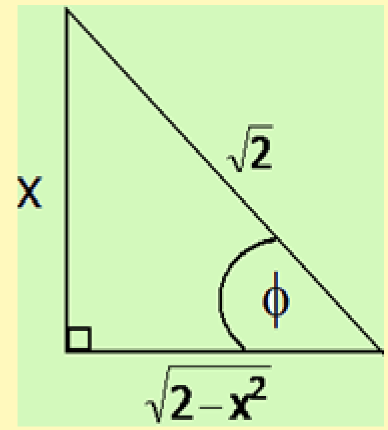
menggunakan substitusi trigonometri,
diambil: $x = \sqrt{2}\sin\phi$

dengan mengambil $x = \sqrt{2}\sin\phi$, jika diderivatifkan diperoleh $dx = \sqrt{2}\cos\phi\,d\phi$

disamping itu didapat juga: $\sin\phi = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$

lanjutan

sehingga dapat dibuat segitiga siku-siku sebagaimana gambar disamping, dari segitiga tersebut diperoleh:



$$\cos\phi = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos\phi$$

$$\tan\phi = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

sehingga integralnya menjadi:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\cos\phi\right)^3 \sqrt{2}\cos\phi \, d\phi = \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\phi \, d\phi}$$

menggunakan sifat-sifat trigonometri

Ingat bahwa:

$$\cos^4\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\left(1+\cos 4\alpha\right)\right)$$

maka diperoleh bentuk integral berikut ini:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\phi + \tfrac{1}{2}\cos 4\phi \right) d\phi$$

$$= \left(\frac{3}{2}\phi + \sin 2\phi + \tfrac{1}{8}\sin 4\phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\pi$$