PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN & PENYELESAIANNYA

CONTOH:

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

1. $(D^2 + 9)y = x \cos x$
2. $(D^2 + 4)I = t^2 \sin 2t$
3. $(D^4 + 10D^2 + 9)K = 15 \cos (2z + 3)$

***Ingat rumus* EULER**

$$e^{ajx} = \underbrace{\cos ax}_{\text{Bagian Riil}} + \underbrace{j \sin ax}_{\text{Bagian imajiner}}$$

PENYELESAIAN:

Nomor 1. Dari PD tersebut diperoleh persamaan karakteristiknya, adalah:

$$m^2 + 9 = 0 \qquad \text{maka akar-akarnya: } m = \pm 3j$$

Sehingga fungsi komplementernya adalah:

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

Menentukan Y_p (integral khusus), karena Q(x) memuat cos x yang merupakan bagian riil dari rumus Euler maka PD di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$(D^2 + 9)y = xe^{jx} \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{(D^2+9)} xe^{jx}$$

Menurut sifat $\frac{1}{f(D)} e^{ax} F(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} F(x)$ maka bentuk Y_p di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$y_p = e^{jx} \frac{1}{((D+j)^2 + 9)} x \quad \Leftrightarrow \quad y_p = e^{jx} \frac{1}{(D^2 + 2Dj + j^2 + 9)} x$$

$$y_p = e^{jx} \frac{1}{(D^2 + 2Dj + 8)} x$$

Karena bagian yang paling kanan merupakan polinomial orde satu, maka selanjutnya dicari hasil bagi 1 oleh $D^2 + 2Dj + 8$ (*pembagian dihentikan setelah diperoleh derajat D sama dengan derajat polinomial yang diketahui*), hasilnya sebagaimana dalam diagram berikut:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{8} - \frac{Dj}{32} \\
8 + 2Dj + D^2 & 1 \\
 & 1 + \frac{Dj}{4} + \frac{D^2}{8} \quad - \\
 \hline
 & -\frac{Dj}{4} - \frac{D^2}{8} \\
 & -\frac{Dj}{4} + \frac{D^2}{16} - \frac{D^2 j}{32} \quad - \\
 \hline
 & \frac{3D^2}{16} + \frac{D^2 j}{32}
\end{array}
$$

dari hasil pembagian tersebut, maka Yp menjadi:

$$y_p = e^{jx}\left(\frac{1}{8} - \frac{Dj}{32}\right)x$$

Dengan rumus Euler diperoleh,

$$y_p = (\cos x + j \sin x)\left(\frac{1}{8}x - \frac{Dj}{32}x\right)$$

$$y_p = (\cos x + j \sin x)\left(\frac{1}{8}x - \frac{j}{32}\right)$$

Jika dikalikan hasilnya adalah sebagai berikut:

$$y_p = \frac{1}{8}x \cos x + j\,\frac{1}{8}x \sin x - \frac{j}{32}\cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

$$y_p = \frac{1}{8}x \cos x + \frac{1}{32}\sin x + j\left(\frac{1}{8}x \sin x - \frac{j}{32}\cos x\right)$$

Dalam soal, karena Q(x) memuat cos x berarti Q(x) tersebut memuat bagian riil dari rumus Euler sehingga Yp diambil bagian riilnya saja, maka diperoleh:

$$y_p = \frac{1}{8}x \cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

Jadi penyelesaian akhir dari PD nomor 1 tersebut adalah:

$$Y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{8}x \cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

Nomor 2. Dari PD tersebut diperoleh persamaan karakteristiknya, adalah:

$m^2 + 4 = 0$ maka akar-akarnya: $m = \pm 2j$

Sehingga fungsi komplementernya adalah:

$$I_c = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Menentukan I_p (integral khusus), karena Q(t) memuat sin t yang merupakan bagian imajiner dari rumus Euler maka PD di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$(D^2 + 4)I = t^2 e^{2jt} \quad \Rightarrow \quad I_p = \frac{1}{(D^2+4)}t^2 e^{2jt}$$

Menurut sifat $\frac{1}{f(D)}e^{ax}F(x) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}F(x)$ maka bentuk $\boldsymbol{I_p}$ di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$I_p = e^{2jt}\frac{1}{((D+2j)^2+4)}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_p = e^{2jt}\frac{1}{(D^2+4Dj+4j^2+4)}t^2$$

$$I_p = e^{2jt}\frac{1}{(D^2+4Dj+0)}t^2$$

Karena bagian yang paling kanan merupakan polinomial orde dua, maka langkah selanjutnya dicari hasil bagi 1 oleh $D^2 + 4Dj$ (*pembagian dihentikan setelah diperoleh derajat D sama dengan derajat polinomial yang diketahui*), hasilnya sebagaimana dalam diagram berikut:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{4Dj} - \frac{1}{16j^2} + \frac{D}{64j^3} - \frac{D^2}{256j^4} \\ \hline
4Dj + D^2 & 1 \\
 & 1 + \frac{D}{4j} \quad - \\ \cline{2-2}
 & -\frac{D}{4j} \\
 & -\frac{D}{4j} - \frac{D^2}{16j^2} \quad - \\ \cline{2-2}
 & \frac{D^2}{16j^2} \\
 & \frac{D^2}{16j^2} + \frac{D^3}{64j^3} \quad - \\ \cline{2-2}
 & -\frac{D^3}{64j^3} \\
 & -\frac{D^3}{64j^3} + \frac{D^4}{256j^4} \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

dari hasil pembagian tersebut, maka Ip menjadi:

$$I_p = e^{2jt}\left(\frac{1}{4Dj} - \frac{1}{16j^2} + \frac{D}{64j^3} - \frac{D^2}{256j^4}\right)t^2$$

Ingat: D = diferensial dan

$\frac{1}{D}$ = integral

sehingga diperoleh hasil berikut:

$$I_p = e^{2jt}\left(\frac{t^3}{12j} + \frac{t^2}{16} - \frac{t}{32j} - \frac{1}{128}\right)$$

Dengan rumus Euler diperoleh,

$$I_p = (\cos 2t + j\sin 2t)\left(\frac{t^3}{12j} + \frac{t^2}{16} - \frac{t}{32j} - \frac{1}{128}\right)$$

Jika dikalikan hasilnya adalah sebagai berikut:

$$I_p = -\frac{jt^3}{12}\cos 2t + \frac{t^3}{12}\sin 2t + \frac{t^2}{16}\cos 2t + \frac{jt^2}{16}\sin 2t + \frac{jt}{32}\cos 2t - \frac{t}{32}\sin 2t - \frac{1}{128}\cos 2t - \frac{j}{128}\sin 2t$$

$$I_p = \frac{t^3}{12}\sin 2t + \frac{t^2}{16}\cos 2t - \frac{t}{32}\sin 2t - \frac{1}{128}\cos 2t + j\left(\frac{t}{32}\cos 2t - \frac{t^3}{12}\cos 2t + \frac{t^2}{16}\sin 2t - \frac{1}{128}\sin 2t\right)$$

Dalam soal, karena Q(t) memuat sin2t berarti Q(t) tersebut memuat bagian imajiner dari rumus Euler sehingga I_p diambil bagian imajinernya saja, maka diperoleh:

$$I_p = \frac{t}{32}\cos 2t - \frac{t^3}{12}\cos 2t + \frac{t^2}{16}\sin 2t - \frac{1}{128}\sin 2t$$

tetapi dalam I_c sudah memuat sin2t maka I_p adalah:

$$I_p = \frac{t}{32}\cos 2t - \frac{t^3}{12}\cos 2t + \frac{t^2}{16}\sin 2t$$

Jadi penyelesaian akhirnya adalah:

$$I = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 3t + \left(\frac{t}{32} - \frac{t^3}{12}\right)\cos 2t + \frac{t^2}{16}\sin 2t$$

Nomor 3. Dari PD tersebut diperoleh persamaan karakteristiknya, adalah:

$m^4 + 10\,m^2 + 9 = 0$ jika difaktorkan, diperoleh $(m^2+1)(m^2+9) = 0$

maka akar-akarnya: $m_1 = \pm j$; $m_2 = \pm 3j$

Sehingga fungsi komplementernya adalah:

$$K_c = c_1 \cos z + c_2 \sin z + c_3 \cos 3z + c_4 \sin 3z$$

Menentukan K_p (integral khusus), karena Q(z) memuat cos (2z+3) yang merupakan bagian riil dari rumus Euler maka PD di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$(D^4 + 10D^2 + 9)K = 15\,e^{(2z+3)j} \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{1}{(D^4+10D^2+9)}15\,e^{(2z+3)j}$$

maka bentuk K_p di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$K_p = 15\,e^{3j}\,\frac{1}{(D^4+10D^2+9)}\,e^{2jz}$$

$$K_p = 15\,e^{3j}\,\frac{1}{(2j)^4+10(2j)^2+9}\,e^{2jz} \quad \Rightarrow \quad K_p = 15\,e^{3j}\,\frac{1}{16-40+9}\,e^{2jz}$$

$$K_p = 15\,e^{3j}\,\frac{1}{-15}\,e^{2jz} \quad \Rightarrow \quad K_p = -\,e^{3j}.\,e^{2jz} = -\,e^{j(2z+3)}$$

Dengan rumus Euler diperoleh,

$$K_p = -\left(\cos\left(2z+3\right) + j \sin\left(2z+3\right)\right)$$

karena Q(z) memuat cos (2z+3) yang merupakan bagian riil dari rumus Euler maka ***K_p*** diambil bentuk:

$$K_p = -\cos\left(2z+3\right)$$

Jadi penyelesaian akhirnya adalah:

$$K = c_1 \cos z + c_2 \sin z + c_3 \cos 3z + c_4 \sin 3z - \cos\left(2z+3\right)$$