LINGKARAN DALAM DAN LINGKARAN LUAR SEGITIGA

Makalah
Disampaikan dalam pertemuan MGMP Kota Yogyakarta,
pada tanggal 7 Desember 2006

Oleh :
R. Rosnawati, M.Si
Jurusan Pendidikan Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2006

LINGKARAN DALAM DAN LINGKARAN LUAR SEGITIGA [1]

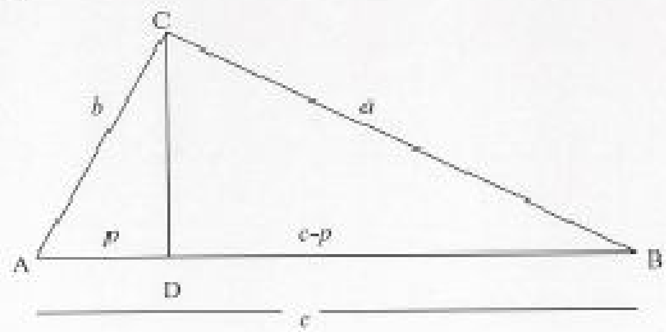
R.Rosnawati, M.Si [2]

A. Pendahuluan

Untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga, panjang jari-jari lingkaran luar segitiga, terlebih dahulu akan dibuktikan rumus luas segitiga yang dinyatakan dengan keliling segitiga, yaitu $L_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan $2s=a+b+c$, dan a,b, serta c adalah panjang sisi-sisi segitiga. Untuk pembuktian ini akan dilakukan dengan dua cara sebagai berikut:

I. Pembuktian Dengan Memanfaatkan Teori Pythagoras

Diberikan sebarang segitiga ABC seperti berikut, apabila pada titik C ditarik garis tinggi CD.



Luas daerah segitiga ABC adalah $\frac{1}{2} alas \times tinggi = \frac{1}{2} ct$

Dalam ΔADC berlaku teorema Pythagoras :

$$t^2 = a^2 - (c-p)^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

Dalam ΔBDC berlaku teorema Pythagoras :

$$t^2 = b^2 - p^2 \quad \ldots\ldots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

---

[1] Disampaikan pada peretemuan MGMP Kota Yogyakarta, pada Desember 2005

[2] Staff Pengajar Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

$$b^2 - p^2 = a^2 - (c-p)^2$$

$$b^2 - p^2 = a^2 - c^2 + 2cp - p^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cp$$

$$p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Dari persamaan (2) diketahui

$$t^2 = b^2 - p^2$$

$$t^2 = (b-p)(b+p)$$

$$t^2 = \left(b - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\right)\left(b + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\right)$$

$$t^2 = \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$t^2 = \left(\frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}\right)\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$t^2 = \frac{1}{4c^2}(a-(b-c))(a+(b-c))((b+c)+a)((b+c)-a)$$

$$t^2 = \frac{1}{4c^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c+a)(b+c-a)$$

$$t^2 = \frac{1}{4c^2}(a-b+c+b-b)(a+b-c+c-c)(b+c+a)(b+c-a+a-a)$$

$$t^2 = \frac{1}{4c^2}(2s-2b)(2s-2c)2s(2s-2a)$$

$$t^2 = \frac{16}{4c^2}(s-b)(s-c)s(s-a)$$

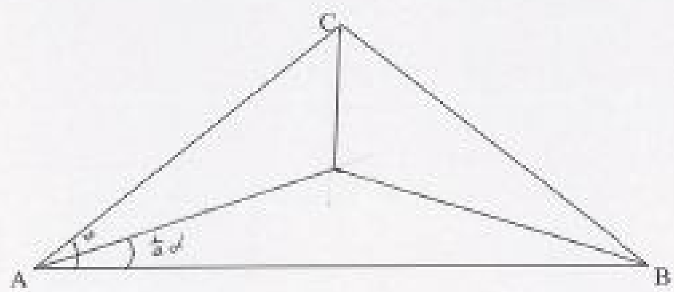
$$t = \sqrt{\frac{16}{4c^2}s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$t = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} L_{\Delta ABC} &= \tfrac{1}{2}ct \\ &= \tfrac{1}{2}c\tfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

II. Pembuktian Dengan Menggunakan Fungsi Trigonometri



Dalam ΔABC berlaku aturan Cosinus yaitu :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\alpha$$

Dalam sebarang segitiga ΔABC berlaku jumlah sudut rangkap

$$Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sin^2\alpha$$

$$= 2Cos^2\alpha - 1 = 1 - 2Sin^2\alpha$$

Diperoleh :

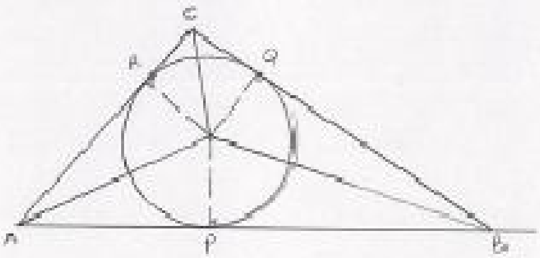
$$Cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(Cos2\alpha + 1) \quad \text{..(3)}$$

$$Sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - Cos2\alpha) \quad \text{..(4)}$$

Dari persamaan (3)

$$Cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(Cos2\alpha + 1)$$

dalam menyinggung sisi-sisi BC, CA, dan AB berturut-turut di titik Q, R dan P, jadi AO, BO, dan CO masing-masing adalah garis-bagi sudut α, β, dan γ. OP = OQ = OR = r, jari-jari lingkaran dalam.



$$\begin{aligned}
\text{Luas } \Delta ABC &= \text{luas } \Delta ABO + \text{luas } \Delta BCO + \text{luas } \Delta AOC \\
&= \left(\tfrac{1}{2} \times AB \times OP\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times BC \times OQ\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times AC \times OR\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{2} \times c \times r\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times a \times r\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times b \times r\right) \\
&= \tfrac{1}{2} r(a+b+c) \\
&= \tfrac{1}{2} r(2s) \\
L &= rs
\end{aligned}$$

Jadi panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah $r = \dfrac{L}{s}$

Penentuan panjang jari-jari lingaran dalam dapat pula ditunjukkan dengan menggunakan fungsi trigonmetri. Kita ketahui bahwa dua garis singgung lingkaran yang ditarik dari sebuah titik sama panjang. Dengan demikian kita peroleh:

$2x + 2y + 2z$ = keliling segitiga = $2s$

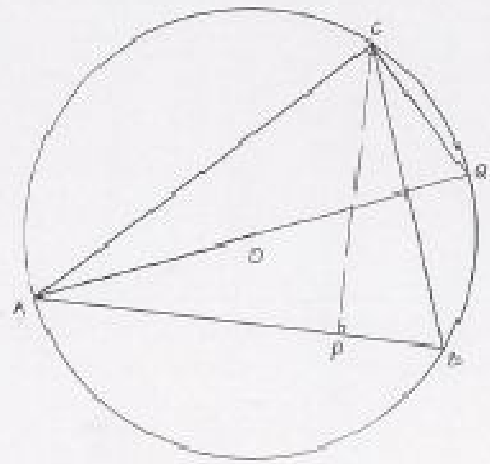
sehingga

$x + y + y = s$

Tetapi $x + y = a$, sehingga persamaan di atas memberikan $z = s - a$

Tetapi $x + z = b$, sehingga $y = s - b$

Dan juga $y + z =$ esehingga $x = s - c$



Perhatikan ΔBPC dan ΔQCA;

$\angle$BPC = $\angle$QCA = 90^0

$\angle$PBC = $\angle$CQA (Sudut keliling menghadap busur AC)

Maka disimpulkan $\angle$BCP = $\angle$QAC

Karena pada ΔBPC dan ΔQCA ketiga pasangan sudut-sudutnya sama besar, maka kedua segitiga itu sebangun. Sehingga diperoleh perbandingan berikut:

$$\frac{AQ}{CB} = \frac{AC}{CP}$$

$$\frac{2R}{a} = \frac{b}{t}$$

$$R = \frac{ab}{2t} \times \frac{c}{c}$$

$$R = \frac{abc}{2 \times \frac{1}{2} \times 2tc}$$

$$R = \frac{abc}{4L}$$

Jadi panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah $R = \dfrac{abc}{4L}$

Pembuktian jari-jari lingkaran luar segitiga dengan fungsi trigonometri, adalah dengan memanfaatkan pembuktian aturan Sinus dalam segitiga yang melibatkan lingkaran luar segitiga. Dalam aturan sinus berlaku: $2R = \frac{a}{Sin\alpha} = \frac{b}{Sin\beta} = \frac{c}{Sin\gamma}$, sehingga diperoleh $a = 2RSin\alpha$; $b = 2RSin\beta$; $c = 2RSin\gamma$ Sedangkan luas segitiga adalah :

$$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ct$$

$$= \frac{1}{2}bcSin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R}$$

$$= \frac{abc}{R}$$

$$R = \frac{abc}{4L}$$

Jadi panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah $R = \frac{abc}{4L}$

D. Penutup

Pembuktian penentuan panjang jari-jari lingkaran dalam dan panjang jari-jari lingkaran luar untuk siswa SMP diberikan dengan bantuan teorema Pythagoras, sedangkan untuk siswa SMA dapat diberikan dengan fungsi trigonometri, namun demikian guru SMP perlu mengetahui pembuktian dengan batuan fungsi trigonometri, agar pengetahuan guru atas keterkaitan dan kontinuitas pembelajaran matematika sekolah khusunya matematika sekolah tingkat SMP dan matematika sekolah tingkat SMA lebih berkembang.

E. Daftar Pustaka

Alders, C.J,. 1959. *Ilmu Ukur Segitiga*. Djakarta: Nordhof-KolffN.V

Frank Ayres JR.1993. *Theory and Problem Trigonometry*, New York : Mc Graw Hill book Company