

RENCANA PELAKSANAAN PERKULIAHAN

MATA KULIAH : ALJABAR LINEAR II

SEMESTER : III

TOPIK : NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

SUB TOPIK : NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

WAKTU : 2 X 50'

A. Standar Kompetensi:

Menjelaskan konsep dan sifat-sifat ruang vektor maupun elemen-elemennya, ruang hasil kali dalam, transformasi linear, nilai eigen dan vektor eigen dan aplikasinya.

B. Kompetensi Dasar :

1. Memahami nilai eigen dan vektor eigen
2. Menjelaskan sifat-sifat nilai eigen

C. Indikator:

1. Menentukan persamaan karakteristik
2. Menentukan nilai eigen
3. Menentukan vektor eigen
4. Memberi nama, memberikan lambang, mendefinisikan, merumuskan, dan memberi contoh

D. Pengalaman Pembelajaran:

1. Mahasiswa memahami bahwa perolehan nilai eigen dan vektor eigen adalah salah satu kasus khusus dari sebuah transformasi linear
2. Mahasiswa dapat menentukan persamaan karakteristik
3. Mahasiswa dapat menentukan nilai eigen
4. Mahasiswa dapat menentukan vektor eigen
5. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat nilai eigen
6. Mahasiswa dapat bekerjasama
7. Mahasiswa berani untuk menyampaikan pendapatnya
8. Mahasiswa dapat menerima adanya perbedaan pendapat

E. Materi Pembelajaran:

1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen
2. Sifat Nilai Eigen

F. Model Pembelajaran:

Kooperatif

G. Langkah-langkah Pembelajaran

No	Kegiatan	Waktu
I	<p>Pendahuluan</p> <ol style="list-style-type: none">a. Mengingat kembali tentang transformasi linearb. Memberikan motivasi berkaitan dengan materi yang akan dipelajari berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen (hasil perbesaran foto, gambar tayangan di TV)c. Memberikan pemahaman secara intuitif berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigend. Menyampaikan tujuan pembelajaran	15'
II	<p>Inti</p> <ol style="list-style-type: none">a. Dosen membagi mahasiswa menjadi kelompok-kelompok dengan masing-masing sebanyak 5 orang berdasarkan posisi tempat dudukb. Mahasiswa berdiskusi untuk melakukan kegiatan 1 pada LKMc. Mahasiswa menempelkan hasil diskusid. Refleksi berkaitan dengan kegiatan 1e. Mahasiswa berdiskusi untuk melakukan kegiatan 2 pada LKMf. Mahasiswa melakukan presentasig. Refleksi berkaitan dengan kegiatan 2	70'
III	<p>Penutup</p> <ol style="list-style-type: none">a. Bersama mahasiswa dosen melakukan penguatanb. Kuis	15'

H. Sumber Belajar

1. LKM

2. Buku Referensi :

Howard, Anton. 1984. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons. New York. Bab VI. Halaman 277 - 282

Setya Budi W. 1995. *Aljabar Linear*. Gramedia, Jakarta Bab VI. Halaman 267 – 277.

I. Sistem Penilaian

Bentuk Penilaian : Aktivitas dan Kuis

LEMBAR KEGIATAN MAHASISWA (II)

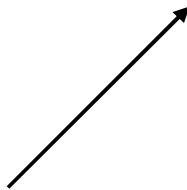
Indikator:

Setelah kegiatan ini diharapkan mahasiswa dapat:

9. Menentukan persamaan karakteristik
10. Menentukan nilai eigen
11. Menentukan vektor eigen
12. Menjelaskan sifat-sifat nilai eigen

Kegiatan 1

Diberikan transformasi linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan A_n matriks representasi dari transformasi linear T . Efek geometri x dari transformasi linear T atau hasil kali matriks A dengan x adalah λx . Dengan kata lain bayangan dari vektor x adalah λ kali vektor x



Masalah selanjutnya adalah diberikan A_n matriks representasi dari transformasi linear akan dicari vektor $x \neq 0$ dan nilai λ , sehingga efek geometri dari x adalah λx . Secara matematik dirumuskan :

$$A_n x = \lambda x$$

$$A_n x = \lambda I_n x$$

$$(A_n - \lambda I_n) x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

Persamaan (1) adalah SPL homogen. Diskusikan dalam kelompok apakah syarat agar SPL homogen memiliki solusi $x \neq 0$.

Kasus 1

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks representasi dari sebuah transformasi linear.

akan dicari vektor \mathbf{x} dan nilai λ , sehingga efek geometri dari \mathbf{x} adalah $\lambda\mathbf{x}$. Secara matematik dirumuskan :

$$\dots\dots\dots = \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots$$

$$(\dots\dots\dots) \mathbf{x} = \dots\dots$$

$$\left(\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

Masalah di atas adalah masalah

Karena yang dicari nilai $\mathbf{x} \neq 0$ (solusi non trivial)

Agar SPL homogen $\mathbf{A}_n\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi non trivial haruslah determinan $\mathbf{A} = \dots\dots$

$$\det \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots \quad \text{(dinamakan persamaan karakteristik)}$$

$$\dots\dots\dots = \dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots$$

$$\lambda_1 = \dots\dots ; \quad \lambda_2 = \dots\dots ; \quad \text{(dinamakan nilai eigen)}$$

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x} \neq 0$, substitusikan nilai λ_1 pada persamaan 1

$$\left(\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots \quad \text{(dinamakan vektor eigen)}$$

Secara analog:

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x} \neq 0$, substitusikan nilai λ_2 pada persamaan 1

Kegiatan 2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

Teorema berikut mengikhtisarkan hasil-hasil yang telah diperoleh sampai sejauh ini

Teorema

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut equivalent satu sama lain:

- (a) λ adalah nilai eigen dari A
- (b) Sistem persamaan $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial
- (c) Ada vektor tak nol \mathbf{x} di dalam \mathbb{R}^n sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- (d) λ adalah pemecahan dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$

Kesimpulan :

Tuliskan dengan kalimat sendiri apa yang dimaksud dengan vector eigen dan nilai eigen

LEMBAR KEGIATAN MAHASISWA (III)

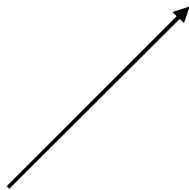
Indikator:

Setelah kegiatan ini diharapkan mahasiswa dapat:

- 13. Menentukan persamaan karakteristik
- 14. Menentukan nilai eigen
- 15. Menentukan vektor eigen
- 16. Menjelaskan sifat-sifat nilai eigen

Kegiatan 1

Diberikan transformasi linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan A_n matriks representasi dari transformasi linear T . Efek geometri x dari transformasi linear T atau hasil kali matriks A dengan x adalah λx . Dengan kata lain bayangan dari vektor x adalah λ kali vektor x



Masalah selanjutnya adalah diberikan A_n matriks representasi dari transformasi linear akan dicari vektor $x \neq 0$ dan nilai λ , sehingga efek geometri dari x adalah λx . Secara matematik dirumuskan :

$$A_n x = \lambda x$$

$$A_n x = \lambda I_n x$$

$$(A_n - \lambda I_n) x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

Persamaan (1) adalah SPL homogen. Diskusikan dalam kelompok apakah syarat agar SPL homogen memiliki solusi $x \neq 0$.

Kasus 1

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks representasi dari sebuah transformasi

linear.

akan dicari vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dan nilai λ , sehingga efek geometri dari transformasi dari \mathbf{x} adalah $\lambda\mathbf{x}$. Secara matematik dirumuskan :

.....=

..... =

(.....) $\mathbf{x} = \dots$

$$\left(\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(1)$$

Masalah di atas adalah masalah

Karena yang dicari nilai $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (solusi non trivial)

Agar SPL homogen $\mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memiliki solusi non trivial haruslah determinan $\mathbf{A} = \dots\dots$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \dots$$

..... = (dinamakan persamaan karakteristik)

..... =

..... =

$\lambda_1 = \dots\dots$; $\lambda_2 = \dots\dots$; $\lambda_3 = \dots\dots$ (dinamakan nilai eigen)

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, substitusikan nilai λ_1 pada persamaan 1

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots \quad (\text{dinamakan vektor eigen})$$

Secara analog:

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x} \neq 0$, substitusikan nilai λ_2 pada persamaan 1

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x} \neq 0$, substitusikan nilai λ_3 pada persamaan 1

Kegiatan 2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

Teorema berikut mengikhtisarkan hasil-hasil yang telah diperoleh sampai sejauh ini

Kesimpulan :

I. Tuliskan dengan kalimat sendiri apa yang dimaksud dengan

1. Persamaan karakteristik
2. vector eigen dan nilai eigen

II. Tuliskan langkah-langkah menentukan nilai eigen dan vektor eigen

LEMBAR KEGIATAN MAHASISWA

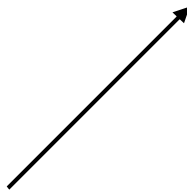
Indikator:

Setelah kegiatan ini diharapkan mahasiswa dapat:

Mengetahui sifat dari vektor eigen

Kegiatan 1

Diberikan transformasi linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan A_n matriks representasi dari transformasi linear T . Efek geometri x dari transformasi linear T atau hasil kali matriks A dengan x adalah λx . Dengan kata lain bayangan dari vektor x adalah λ kali vektor x



Masalah selanjutnya adalah diberikan A_n matriks representasi dari transformasi linear akan dicari vektor $x \neq 0$ dan nilai λ , sehingga efek geometri dari x adalah λx . Secara matematik dirumuskan :

$$A_n x = \lambda x$$

$$A_n x = \lambda I_n x$$

$$(A_n - \lambda I_n) x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

Persamaan (1) adalah SPL homogen. Diskusikan dalam kelompok apakah syarat agar SPL homogen memiliki solusi $x \neq 0$.

Teorema

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut equivalent satu sama lain:

- (e) λ adalah nilai eigen dari A
- (f) Sistem persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial
- (g) Ada vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n sehingga $Ax = \lambda x$
- (h) λ adalah pemecahan dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$

