**MATRIKS DAN DETERMINAN**

**Pendahuluan**

 Banyak persoalan dalam matematika murni maupun terapan yang disajikan dalam sistem persamaan linear. Misalnya, penerapan Hukum Kirchhoff dalam rangkaian listrik biasanya akan menghasilkan sistem persamaan linear dengan variabel arus listrik. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan dua variabel biasanya digunakan metode substitusi atau eliminasi. Akan tetapi, untuk sistem persamaan linear yang melibatkan tiga variabel atau lebih, metode ini ternyata tidak efisien.

 Untuk menyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel atau lebih, kita akan membahas metode reduksi baris atau eliminasi Gauss dan aturan Cramer. Sebelum membahas kedua metode ini, kita akan membicarakan konsep matriks dan determinan.

**Definisi**

Diandaikan kita memiliki sistem persamaan linear berikut:

Koefien-koefisien *x*, *y*, dan *z* dapat dituliskan sebagai

.

Sistem bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom ini dikenal dengan sebutan matriks. Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk persegi yang terdiri atas *m* baris dan *n* kolom. Sebuah matriks *A* biasanya dituliskan dalam bentuk

.

Setiap bilangan pada matriks disebut unsur atau elemen, dengan indeks *i* dan *j* berturut-turut menunjukkan unsur yang terletak pada baris ke-*j* dan kolom ke-*k* matriks yang bersangkutan.

 Jika banyaknya baris *m* sama dengan banyaknya kolom *n*, dikenal matriks bujur sangkar berukuran atau berorde *n*. Sebuah matriks yang hanya terdiri satu baris dinamakan matriks baris. Sebaliknya, sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom dinamakan matriks kolom.

**Aljabar Matriks**

1. Kesamaan Matriks

Dua matriks dan matriks yang berukuran sama (memiliki jumlah baris dan kolom yang sama), dikatakan sama jika dan hanya jika . Sebagai contoh,

,
jika dan hanya jika *x* = 2, *y* = −1, *r* = 0, *s* = 4, *u* = 8, dan *v* = 3.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks *A* dan *B* yang berukuran sama dapat dijumlahkan/dikurangkan untuk menghasilkan matriks *C* yang unsur-unsurnya merupakan hasil penjumlahan/pengurangan dari unsur matriks *A* dan *B* yang bersesuaian. Secara matematis, jika *A* dan *B* adalah dua matriks yang berukuran sama, maka dengan

1. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian matriks *A* dengan skalar *k* akan menghasilkan sebuah matriks baru *B* yang unsur-unsurnya diperoleh dengan mengalikan unsur-unsur matriks *A* dengan *k*. Jadi, *B* = *kA*.

1. Perkalian dua Matriks

Jika sebuah matriks berukuran dan sebuah matriks berukuran , maka perkalian matriks *A* dengan matriks *B*, yaitu *C = AB*, didefinisikan sebagai

,

dengan matriks *C* berukuran Perkalian dua matriks dapat dilakukan jika dan hanya jika banyaknya kolom *A* sama dengan banyaknya baris *B*.

Untuk dan , diperoleh .

Berbeda dengan aljabar bilangan biasa, perkalian matriks pada umumnya tidak komutatif. Akan tetapi, hukum asosiatif dan distributif tetap berlaku:

*A*(*BC*)= (*AB*)*C*, *A*(*B* + *C*) = *AB* + *AC*, (*A* + *B*)*C* = *AC* + *AC*.

 Sebuah matriks *A* dapat dikalikan dengan dirinya sendiri jika dan hanya jika *A* adalah matriks bujur sangkar. Ungkapan *AA* biasanya ditulis . Dengan cara yang sama, , dan sebagainya.

1. Matriks Transpos

 Untuk matriks *A* dapat dilakukan operasi transposisi, yaitu mengganti baris dengan kolomnya sehingga diperoleh matriks baru. Matriks baru sebagai hasil transposisi ini dinamakan transpose dari *A* dan dinyatakan dengan Dengan demikian, jika maka Sebagai contoh, jika

 maka .

 Sifat-sifat matriks transpos: , , dan

Untuk matriks kompleks, yaitu matriks yang unsur-unsurnya bilangan kompleks, terdapat operasi konjugat kompleks dan konjugat hermite.

 Operasi konjugat kompleks pada matriks kompleks *C* yang dinyatakan dengan akan menghasilkan matriks baru *B* yang elemen-elemennya adalah konjugat kompleks dari *C*. Jadi, Matriks dikenal sebagai matriks konjugat kompleks dari *C*.

 Operasi konjugat hermite pada matriks kompleks *C* merupakan kombinasi dari operasi konjugat kompleks dan transposnya sehingga sehingga menghasilkan matriks baru *B*. Dengan demikian, atau . Elemen-elemen matriks *B* adalah . Matriks *B* ini dikenal sebagai matriks konjugat hermite dari *C*.

Sebagai contoh, jika

 maka .

**Matriks-matriks Khusus**

Matriks bujur sangkar, matriks baris, dan matriks kolom biasanya dikelompokkan ke dalam matriks khusus. Ada beberapa matriks khusus yang lain, yaitu:

1. Matriks diagonal, yaitu matriks yang semua unsurnya nol kecuali unsur-unsur yang terletak pada diagonal utama. Contoh,

.

Jumlah semua unsur diagonal utama sebuah matriks bujur sangkar dinamakan *trace* matriks yang bersangkutan.

1. Matriks segitiga, yaitu matriks bujur sangkar yang semua unsurnya terletak di bawah atau di atas diagonal utama sama dengan nol. Jika unsur-unsur nol terletak di bawah diagonal utama, biasanya disebut matriks segitiga atas. Sebaliknya, jika unsur-unsur nol terletak di atas diagonal utama disebut matriks segitiga bawah.
2. Matriks satuan, yaitu matriks bujur sangkar yang semua unsurnya pada diagonal utama sama dengan 1, sedangkan unsur-unsur yang lain sama dengan nol. Matriks satuan biasanya diberi simbol *I*. Sebagai contoh,

.

1. Matriks nol, yaitu matriks yang unsur-unsurnya sama dengan nol dan biasanya diberi simbol *O*. Untuk matriks *A* yang ukurannya sama dengan *O*, berlaku dan
2. Matriks simetri, yaitu matriks bujur sangkar yang memenuhi sifat Jika *A* disebut matriks taksimetri.
3. Matriks kofaktor, yaitu matriks yang didefinisikan sebagai .

Jika maka , dengan

, , dan seterusnya.

1. Matriks adjoint, yaitu matriks yang diperoleh dari transpose matriks kofaktor. Jadi, .

 Untuk , , dan .

1. Jika , matriks *A* dikatakan *self-adjoint*.
2. Jika matriks *A* dikatakan involuntary.
3. Jika , matriks *A* dinamakan matriks real.
4. Jika matriks *A* dinamakan matriks orthogonal.
5. Jika , matriks *A* dinamakan matriks hermite.
6. Jika matriks *A* dinamakan matriks uniter.
7. Jika matriks *A* dinamakan matriks imajiner murni.
8. Jika matriks *A* dinamakan matriks idempotent (*indepotent matrix*).

**Determinan**

Untuk setiap matriks bujur sangkar *A* terdapat nilai karakteristi yang dikenal sebagai determinan, biasa ditulis det (*A*) atau . Determinan matriks *A* ditulis sebagai

.

Jika matriks *A* dengan det (*A*) = 0, *A* disebut matriks singular. Sebaliknya, jika det (*A*) , *A* disebut matriks taksingular.

**Minor**

Jika baris ke-*j* dan kolom ke-*k* pada determinan yang disajikan di atas dihilangkan, kemudian dibentuk sebuah determinan dari unsur-unsurnya yang tertinggal, akan diperoleh determinan baru yang terdiri atas (*n*-1) baris dan (*n*-1) kolom. Determinan baru ini merupakan minor dari unsur dan dinyatakan dengan ungkapan . Sebagai contoh,

maka minor unsur adalah , yaitu

.

Jika minor dari dikalikan dengan hasilnya dinamakan kofaktor dari dan dinyatakan dengan . Jadi,

.

Untuk menentukan determinan matriks *A* dapat digunakan ekspansi Laplace yang menyatakan bahwa nilai determinan merupakan jumlah dari hasil kali unsur-unsur pada suatu baris (atau suatu kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. Secara matematis,

, untuk sembarang *j*.

Sebagai contoh, kita akan menghitung

Untuk *j* =1, diperoleh

,

dengan dan . Jadi,

.

**Sifat-sifat Determinan**

1. Nilai determinan tidak berubah apabila baris dan kolomnya dipertukarkan. Jadi,
2. Jika semua unsur dari suatu baris (atau kolom) adalah nol, determinan matriks itu sama dengan nol.
3. Jika semua unsur dari suatu baris (atau kolom) adalah nol, kecuali satu unsur, determinannya sama dengan hasil kali unsur itu dengan kofaktornya.
4. Pertukaran dua baris atau dua kolom sembarang akan mengubah tanda determinan.
5. Jika semua unsur dalam suatu baris (atau kolom) dikalikan dengan sebuah bilangan, determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu.
6. Jika dua baris (atau kolom) sama atau sebanding, determinannya sama dengan nol.
7. Jika setiap unsur dalam suatu baris (atau kolom) sebuah determinan merupakan jumlah dua suku, determinannya dapat dinyatakan sebagai jumlah dua determinan yang berukuran sama.
8. Jika kita mengalikan unsur-unsur suatu baris (atau kolom) dengan sebuah bilangan kemudian dijumlahkan dengan unsur-unsur yang bersesuaian dengan suatu baris (atau kolom) yang lain, nilai determinannya tetap.
9. Jika *A* dan *B* dua matriks bujur sangkar yang berukuran sama, maka
10. Jumlah dari hasil kali unsur-unsur dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dari baris (atau kolom) lainnya adalah nol. Secara matematis,

 atau , jika

Jika , hasilnya sama dengan

**Invers Matriks**

Jika pada matriks bujur sangkar *A* terdapat matriks *B* sehingga *AB* = *I*, dengan *I* adalah matriks identitas, maka *B* dinamakan invers matriks *A* dan ditulis sebagai Jadi, jika *A* adalah matriks bujur sangkar tak singular berorde-*n*, maka terdapat satu invers sehingga Invers matriks memiliki sifat, dan

Untuk menentukan invers matriks dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: metode reduksi baris dan metode determinan.

**Metode Reduksi Baris**

Untuk memberi gambaran penerapan metode reduksi baris, diandaikan kita akan menghitung invers matriks *A*. Dengan mengingat sifat-sifat matriks satuan *I*, *A* = *IA*. Selanjutnya, dengan mereduksi *A* di ruas kiri menjadi *I* maka ruas kanan akan tereduksi menjadi *B* sehingga menghasilkan *I* = *AB*. Jadi, *B* adalah invers matriks *A*. Metode reduksi baris terdiri atas operasi-operasi berikut:

* menukarkan dua baris,
* mengalikan sembarang baris dengan sebuah tetapan dan
* menjumlahkan atau mengurangkan dua baris sembarang.

Untuk memudahkan penulisan operasi reduksi baris, biasa digunakan notasi dan Notasi pertama menunjukkan baris-*j* dan baris-*k* dipertukarkan, sedangkan notas kedua artinya baris-*j* dikalikan dengan *a* kemudian dijumlahkan atau dikurangkan dengan *b* kali baris-*k*.

**Metode Determinan**

Sebuah matriks memiliki invers jika dan hanya jika Invers matriks *A* dapat ditentukan dengan rumus

**Sistem Persamaan Linear**

Sistem persamaan linear dengan *n* variabel adalah suatu himpunan persamaan linear yang berbentuk

Jika sistem persamaan linear di atas disebut homogen. Sebaliknya, jika dinamakan takhomogen. Sistem persamaan linear di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

atau *AX = R*.

Untuk menyelesaian system persamaan linear di atas digunakan dua cara, yaitu metode reduksi baris dan aturan Cramer (lihat Bambang Ruwanto. 2002. *Matematika untuk Fisika dan Teknik I*. Yogyakarta: Adicita hal. 131-135)