UJIAN AKHIR SEMESTER

Mata Kuliah	:	Persamaan Diferensial	Waktu	:	120 menit
Dosen	:	Dr. Sugiman	Prodi	:	S-2 Pend. Mat.
Hari/Tgl	:	Senin, 17 Januari 2011	Sifat	:	Tutup Buku

Kerjakan empat soal berikut.

1. Diberikan persamaan diferensial berorder dua yang tidak homogen sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \theta^2 y = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{Cos}\,(k\pi t)$$

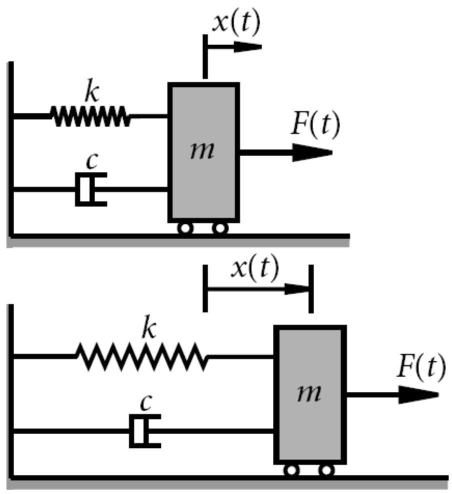
dengan nilai $\theta > 0$ dan $\theta \neq k\pi$ untuk k = 1, 2, 3, ... , *N*.

   a. Tentukan solusi khusus dan solusi parsialnya.
   b. Tentukan solusi umumnya.
   c. Verifikasi bahwa solusi umum yang diperoleh di b memenuhi persamaan diferensial semula.
   d. Apa yang terjadi jika syarat $\theta \neq k\pi$ untuk k = 1, 2, 3, ... , *N* dihilangkan; apakah persamaan diferensialnya masih mempunyai solusi? Jelaskan!

2. Persamaan diferensial homogen $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ dengan $x > 0$ mempunyai solusi $y_1(x) = x^2$ dan $y_2(x) = x^2 \ln x$.
   a. Verifikasilah bahwa y_1 dan y_2 masing-masing merupakan solusi dari persamaan diferensial homogen tersebut.
   b. Selidikilah dengan memakai Wronskian apakah y_1 dan y_2 tersebut bebas liniear atau bergantung linier dan kemudian carilah solusi umumnya.
   c. Carilah solusi parsial dari persamaan diferensial non-homogen $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$.

3. Diberikan persamaan diferensial homogen berorder dua $(x^2 - 3)y'' + 3xy' + y = 0$
   a. Carilah solusinya dalam bentuk deret Maclaurin.
   b. Chek kembali apakah solusi deret yang ditemukan tersebut mememenuhi PD semula
   c. Pada interval manakah solusi deret tersebut konvergen.

4. Perhatikan gambar di samping. Benda bermassa *m* dihubungkan pada pegas yang memiliki konstanta sebesar *k* dan sebuah tali dengan konstanta *damping* sebesar *c*. Benda tersebut diberi gaya eksternal sebesar *F*(*t*) = $F_0 \sin \omega_0 t$. Apabila *x*(*t*) menyatakan jarak antara posisi benda terhadap posisi semula pada waktu t detik dan konstanta c ditiadakan; maka diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut.



$$mx'' + kx = F_0 \sin \omega_0 t$$

dengan $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

   a. Carilah solusi homogen dari persamaan diferensial di atas.
   b. Solusi parsial dari persamaan diferensial tersebut adalah $x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0} \text{t} \cos \omega_0 t$.
      Gambarlah sketsa solusi parsial ini di bidang x-t.
   c. Berdasar grafik tersebut berilah pemaknaannya pada konteks pegas semula.

--- 000 ---

Denoting

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \omega_0 = \text{natural circular frequency},$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_0, \qquad \zeta = \text{nondimensional damping coefficient},$$

Resonance

When $\zeta = 0$ and $\Omega = \omega_0$, the equation of motion becomes

$$\ddot{x}_P + \omega_0^2 x_P = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t,$$

and the particular solution is given by

$$x_P(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\mathcal{D}^2 + \omega_0^2} \sin \omega_0 t = \frac{F_0}{m} \mathcal{Im}\left(\frac{1}{\mathcal{D}^2 + \omega_0^2} e^{\imath \omega_0 t}\right).$$

Applying Theorem 4 of Chapter 4,

$$\phi(D) = D^2 + \omega_0^2, \quad \phi(i\omega_0) = (i\omega_0^2)^2 + \omega_0^2 = 0,$$

$$\phi'(D) = 2D, \qquad \phi'(i\omega_0) = 2i\omega_0 \neq 0,$$

$$\therefore\ x_P(t) = \frac{F_0}{m}\mathcal{Im}\left[\frac{1}{\phi'(i\omega_0)}t\,e^{i\omega_0 t}\right] \quad ✍ \text{ Theorem 4 of Chapter 4}$$

$$= \frac{F_0}{m}\mathcal{Im}\left[\frac{1}{2i\omega_0}t(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t)\right] = -\frac{F_0}{2m\omega_0}t\cos\omega_0 t.$$

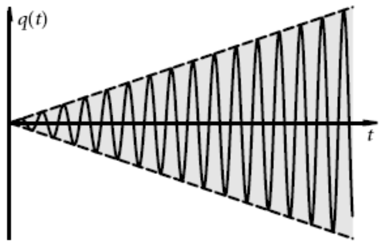


Figure 5.15 Response of a system in resonance.

To sketch the response, $F_0 t/(2m\omega_0)$, which is a straight line, is regarded as the amplitude of the response. This straight line and its mirror image $-F_0 t/(2m\omega_0)$ form the envelop of the sinusoidal function $-\cos\omega_0 t$. Fitting the sinusoidal function $-\cos\omega_0 t$ inside the envelop results in the response as shown in Figure 5.15.

Hence, when the system is undamped and the excitation frequency is equal to the natural frequency, the system is in resonance and the amplitude of the response of the system grows linearly with time.

#2

In each of Problems 13 through 20 verify that the given functions y_1 and y_2 satisfy the corresponding homogeneous equation; then find a particular solution of the given nonhomogeneous equation. In Problems 19 and 20, g is an arbitrary continuous function.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^{-1}$
14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$
15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = 1 + t, \quad y_2(t) = e^t$
16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1; \qquad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln x$

1.

1.

UAS PD

PM-A DAN PM-B

Kerjakan 4 soal berikut.

5. Modif dari: halaman 190 subab 3.7. nomor 5 atau 17

In each of Problems 5 through 12 find the general solution of the given differential equation. In Problems 11 and 12, g is an arbitrary continuous function.

5. $y'' + y = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \quad 0 < t < \pi/6$

In each of Problems 13 through 20 verify that the given functions y_1 and y_2 satisfy the corresponding homogeneous equation; then find a particular solution of the given nonhomogeneous equation. In Problems 19 and 20, g is an arbitrary continuous function.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^{-1}$
14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$
15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = 1 + t, \quad y_2(t) = e^t$
16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1; \qquad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x$

Nomor 1. Boyce halaman 185

(Harap dimodifikasi)

28. Determine the general solution of

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin m\pi t,$$

where $\lambda > 0$ and $\lambda \neq m\pi$ for $m = 1, \ldots, N$.

Nomor 3.

Kelas B: Deret Maclaurin (Modifikasi dari hal 259 subab 5.2 no 11 untuk kelas B; Kelas A: Deret Taylor hal 259 subab 5.2 #14)

d. Carilah solusi dalam bentuk deret.
e. Chek kembali bahwa solusi yang ditemukan mememenuhi PD semula
f. Keberlakuan deret tersebut / pada interval manakah deret yang ditemukan konvergen.

11. $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \qquad x_0 = 0$

Nomor 4: Masalah terapan di pegas atau lainnya. (PD telah diberikan; hanya mencari solusi dan memaknainya)