

## PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

Model persamaan diferensial orde 2 terdiri dari 4 type, yaitu :

- ❖ Tipe  $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
- ❖ Tipe  $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$
- ❖ Tipe  $a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$
- ❖ Tipe  $a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

### A. PD Orde 2 Tipe $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Contoh : carilah jawaban umum persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 + x$$

$$\text{Jawab : } \frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 + x$$

$$\frac{dy}{dx} = \int 4x^3 + 3x^2 + x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$y = \int x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$$

**B. PD Orde 2 Tipe  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$**

Contoh :  $x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0 \rightarrow$  Carilah jawaban umumnya.

Penyelesaian :

misal :  $p = \frac{dy}{dx}$  maka  $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$  .....(1)

apabila persamaan (1) dimasukkan ke soal

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p + x = 0$$

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p = -x \quad \dots\dots\dots(2)$$

ingat rumus  $\frac{d(x.p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$

$$\frac{d(x.p)}{dx} = x \frac{dp}{dx} + p \cdot 1 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Jika persamaan (2) = persamaan (3) maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = -x$$

Kemudian kedua ruas diintegrasikan

$$xp = \int -x \, dx$$

$$xp = -\frac{1}{2} x^2 + c_1$$

Dari persamaan (1) diketahui bahwa  $P = \frac{dy}{dx}$  maka harga p dapat diganti

dengan  $\frac{dy}{dx}$  menjadi

$$x \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad \text{kemudian semua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{c_1}{x}$$

$$y = \int -\frac{1}{2}x + \frac{c_1}{x}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 \cdot \ln x + c_2$$

C. PD Orde 2 Yang Berbentuk  $a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$

Persamaan tersebut, jika harga

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m \text{ dan } y = 1, \text{ sehingga persamaannya menjadi:}$$

$$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow \text{disebut persamaan karakteristik.}$$

$$m = m_1 \text{ dan } m = m_2$$

**Dimana m = akar-akar penyelesaian**

❖ Jika  $m_1 \neq m_2$  maka harga :

$$y = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x}$$

A dan B = Konstanta (atau  $c_1$  dan  $c_2$ )

❖ Jika  $m_1 = m_2$  maka

$$Y = e^{m_1 x} (A + B x)$$

❖ Jika keduanya (akar-akar penyelesaiannya tersebut kompleks),

atau  $m = a + b j$ , atau  $m = a + bi$

$$Y = e^{ax} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

Contoh soal :

1. Carilah penyelesaian Persamaan Deferensial berikut ini.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Jawab :

jika  $\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2$ ,  $\frac{dy}{dx} = m$  dan  $y = 1$ , maka

Persamaan karakteristiknya :

$$1 m^2 + 3 m + 2 = 0$$

$$(m+1)(m+2)=0$$

sehingga :  $m = -1$ ;  $m = -2$ . ( $m_1 \neq m_2$ )

Jadi pemecahan permasalahan tersebut adalah :

$$Y = A.e^{-x} + B.e^{-2x}$$

2. Carilah penyelesaian PD berikut:  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

Jawab :

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m + 3)(m + 3) = 0 \Rightarrow m = -3 \text{ akar kembar sehingga}$$

$$Y = e^{-3x} (A + Bx)$$

3. Carilah penyelesaian PD berikut:  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

Jawab :

$$m^2 + 4m + 9 = 0$$

Dengan menggunakan rumus ABC didapat

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-4 \pm j \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{2}$$

$$m = -2 \pm j\sqrt{5}$$

Sehingga  $\alpha = -2$  dan  $\beta = \sqrt{5}$

Dan akhirnya memberikan

$$Y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$Y = e^{-2x} [A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x]$$

D. PD Orde 2 Yang Berbentuk  $a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

Pada persamaan diferensial bentuk ini dikenal dua istilah, yaitu :

- 1). **FUNGSI KOMPLEMENTER** : diperoleh dengan memecahkan persamaan bila  $f(x)=0$ , seperti dalam bagian program sebelum ini.

Adapun pemecahannya, jika  $f(x)=0$ , adalah :

❖ Untuk akar yang berbeda  $Y = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x}$

❖ Untuk akar kembar  $Y = e^{m_1 x} (A + B x)$

❖ Untuk akar imajiner  $Y = e^{ax} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$

- 2). **INTEGRAL KHUSUS** : Diperoleh dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi ruas kanan persamaan yang diberikan, yaitu dengan mensubstitusikan bentuk umum tersebut ke dalam persamaannya dan kemudian menyamakan koefisien-koefisiennya.

❖ Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat dua, bentuk umumnya :

$$Y = C x^2 + D x + E$$

❖ Jika ruas kanan berderajat satu, maka persamaan umumnya :

$$Y = Cx + D.$$

- 3). Jawaban yang sesungguhnya = **jawaban fungsi komplementer** + **integral khusus**.

Contoh :

Selesaikan persamaan diferensial dari  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2$

Jawab :

1). Fungsi Komplementer, pemecahannya dengan persamaan kiri = 0, yaitu :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \text{ yang memberikan}$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m - 2)(m - 3) = 0$$

$$m = 2 \text{ atau } m = 3$$

Jawaban fungsi komplementer :

$$Y = A e^{2x} + B e^{3x}$$

2). Integral khusus :

Karena ruas kanan adalah fungsi berderajat dua ( $x^2$ ) sehingga bentuk umum persamaan berderajat dua adalah :

$$Y = C x^2 + D x + E$$

maka  $\frac{dy}{dx} = 2 C x + D$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 C$$

harga  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$  dan  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  dimasukkan ke persamaan semula (soal) , yaitu :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

$$2C - 5(2 Cx + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$

$$2C - 10 Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$$

$$6Cx^2 + (6D - 10 C)x + (2C - 5D + 6E) = x^2$$

bentuk tersebut bisa ditulis :

$$6Cx^2 + (6D - 10C)x + (2C - 5D + 6E) = 1x^2 + 0x + 0$$

dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama, kita dapatkan :

$$x^2 \Rightarrow 6c = 1$$

$$c = \frac{1}{6}$$

$$x \Rightarrow 6D - 10c = 0$$

$$6D - 10 \cdot \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow D = \frac{5}{18}$$

$$0 \Rightarrow 2c - 5D + 6E = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot \frac{5}{18} + 6 \cdot E = 0$$

$$E = \frac{19}{108}$$

Jadi Integral khususnya adalah :

$$\begin{aligned} Y &= cx^2 + Dx + E \\ &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} \end{aligned}$$

Sehingga jawaban yang sebenarnya adalah :

$$Y = \text{Fungsi Komplementer} + \text{Integral Khusus}$$

$$= Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$