PROGRAM PASCASARJANA UNY
UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2013/2014

MATA KULIAH	: SISTEM DINAMIK I
HARI/TANGGAL	: RABU/30 APRIL 2014
PRODI	: PMAT S2
RUANG	: R. 306 A GEDUNG LAMA
WAKTU	: 13.00 – 14.40
DOSEN	: HARTONO
SIFAT	: OPEN BOOKS

SOAL 1 (50 POINTS):
Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = 1 - \sin x_1$$

Tentukan titik-titik kritis dan kestabilannya serta gambarkan beberapa grafik solusi untuk nilai-nilai awal berikut

$$x_1(0) = 2,\ x_1(0) = 0$$
$$x_1(0) = 1,\quad x_1(0) = -1$$

SOAL 2 (50 POINTS):
Gambarkan diagram bifurkasi dari persamaan diferensial berikut ini

$$\dot{x} = x^3 - \lambda x - 2$$

dengain λ adalah parameter riel dan $\dot{x}$ adalah derivatif dari x terhadap variabel t.
Beri penjelasan dari gambar diagramnya.

*** apakah suatu dosa kalau aku bekerjasama dalam ujian? ***

K1

① Perhatikan persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = 1 - \sin x_1 \quad \cdots Ⓐ$$

Titik kritis dari persamaan tsb adalah $\bar{x}_1$ yang memenuhi persamaa

$$1 - \sin \bar{x}_1 = 0 \text{ atau } \sin \bar{x}_1 = 1 .$$

Sehingga $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{2} \pm k 2\pi$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Untuk $k=0$, $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{2}$

$k=1$, $\bar{x}_1 = \frac{5\pi}{2}$, $\bar{x}_1 = -\frac{3\pi}{2}$

$k=2$, $\bar{x}_1 = \frac{9\pi}{2}$, $\bar{x}_1 = -\frac{7\pi}{2}$

$\vdots$

Apabila pers Ⓐ kedua ruas diturunkan thd t, maka diperoleh

$$\ddot{x}_1 = -\cos x_1 (1 - \sin x_1) . \cdots Ⓑ$$

Selanjutnya akan dibuat sket dari grafik solusi pada bidang $x_1 - t$ untuk beberapa nilai awal yaitu $x_1(0) = 2$, $x_1(0) = 1$, $x_1(0) = 0$ dan $x_1(0) = -1$.

Dari persamaan Ⓐ dapat dievaluasi sbb:

untuk $\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{5\pi}{2}$, ~~sin x~~ berlaku $-1 < \sin x_1 < 1$.

Shg $1 - \sin x_1$ terletak antara 0 dan 2 yakni

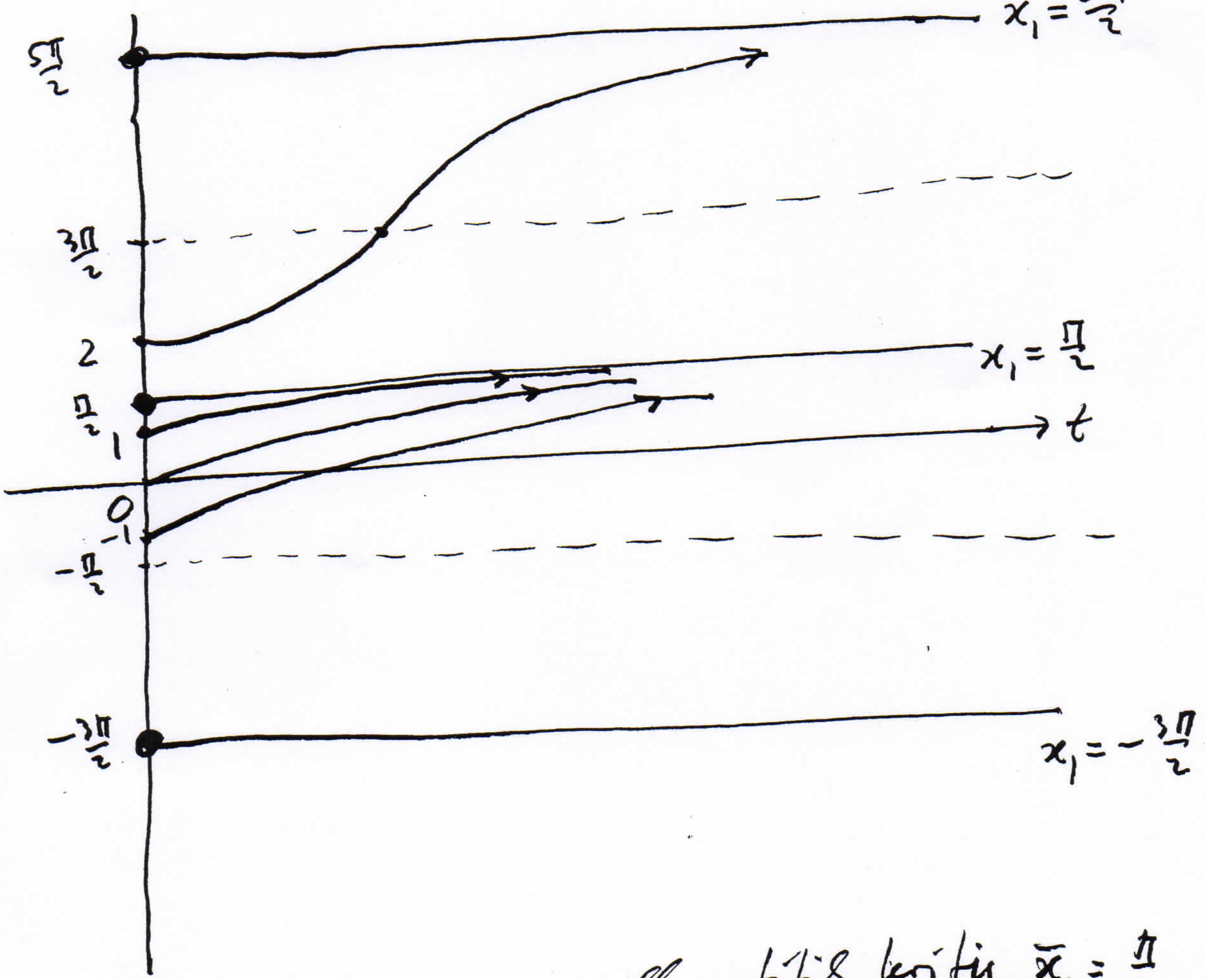
$$\cancel{0 < \sin x} \quad 0 < 1 - \sin x_1 < 2 \quad \text{atau}$$

$$0 < \dot{x}_1 < 2$$

Jadi pada interval $\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{5\pi}{2}$, $\dot{x}_1$ bernilai positip. Sehingga x_1 membesar menuju $\cancel{\frac{5\pi}{2}}$ $\frac{5\pi}{2}$.
Dengan kata lain, grafik solusi monoton naik menuju garis $x_1 = \frac{5\pi}{2}$.

(K2)

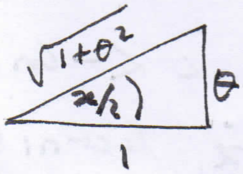
Selanjutnya untuk melihat kecekungan atau kecembungan dari grafik solusi, kita evaluasi pers (B). Pada saat $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, nilai dari $\ddot{x}_1$ sama dengan nol. Untuk $\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{3\pi}{2}$, berlaku $0 < -\cos x_1 < 1$ dan $2 > 1 - \sin x_1 > 0$. Akibatnya $\ddot{x}_1$ bernilai positip antara 0 dan 2 yakni $0 < \ddot{x}_1 < 2$. Dengan demikian grafik solusi pada interval $\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{3\pi}{2}$ cekung. Sedangkan untuk interval $\frac{3\pi}{2} < x_1 < \frac{5\pi}{2}$ nilai dari $\ddot{x}_1$ negatif, shg grafik solusi cembung.



Dari grafik dapat disimpulkan titik kritis $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{2}$ bersifat tak stabil (lebih tepatnya <u>semi stabil</u>)

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \sin x$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int dt$$



Mis : $\tan\frac{x}{2} = \theta$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$d\theta = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+\theta^2)\,dx$$

$$dx = \frac{d\theta}{2(1+\theta^2)}$$

$$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\cdot\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

$$\sin x = \frac{2\theta}{1+\theta^2}$$

$$1-\sin x \equiv 1 - \frac{2\theta}{1+\theta^2} = \frac{1+\theta^2-2\theta}{(1+\theta^2)}$$

$$\equiv \frac{(\theta-1)^2}{(1+\theta^2)}$$

$$\int\frac{dx}{1-\sin x} = \int\frac{\frac{d\theta}{2(1+\theta^2)}}{(\theta-1)^2/(1+\theta^2)} = \int\frac{d\theta}{2(\theta-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(\theta-1)} + \cancel{C}$$

$$-\frac{1}{2(\theta-1)} = t + c$$

$$\theta - 1 = -\frac{1}{2(t+c)}$$

$$\theta = 1 - \frac{1}{2(t+c)} \equiv \frac{2(t+c)-1}{2(t+c)}$$

$$\tan\frac{x}{2} =$$

nomor 2 : Perhatikan persamaan diferensial

$\dot{x} = x^3 - \lambda x - 2$, dimana λ merupakan parameter riel.

Titik kritisnya adalah $\bar{x}$ yang memenuhi persamaan

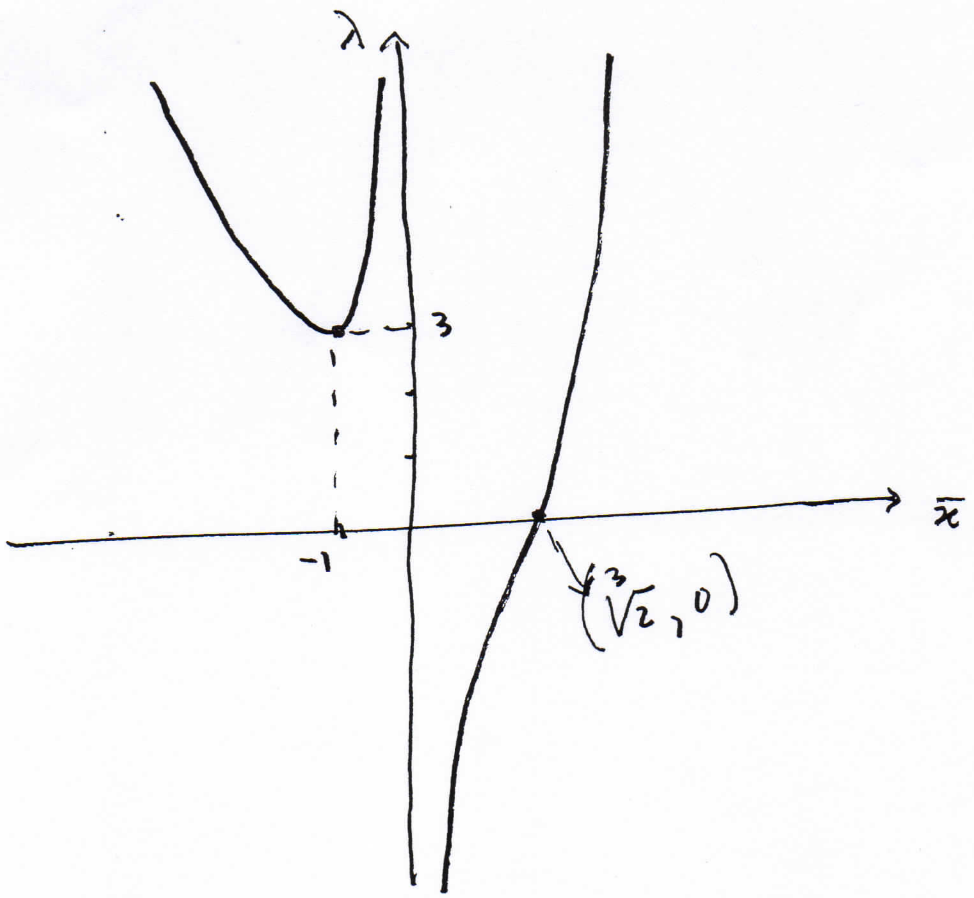
$\bar{x}^3 - \lambda\bar{x} - 2 = 0$. atau $\lambda = \dfrac{\bar{x}^3 - 2}{\bar{x}}$ --- (C)

Selanjutnya akan menggambar grafik pers (C) pada bidang λ-$\bar{x}$!

Turunan dari λ thd $\bar{x}$ yg yaitu $\dfrac{d\lambda}{d\bar{x}} = 2\bar{x} + 2\bar{x}^{-2}$.

$\dfrac{d\lambda}{d\bar{x}} = 0$ ~~di~~peroleh pada saat $\bar{x}$ memenuhi persamaan $2\bar{x} + 2\bar{x}^{-2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\bar{x}^3 + 2}{\bar{x}^2} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = -1$.

$\bar{x} = -1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{\bar{x}^3 - 2}{\bar{x}} = \dfrac{(-1)^3 - 2}{-1} = 3.$



Gambar 1.

Ky

Untuk $\lambda = 0$, maka persamaan menjadi

$$\dot{x} = x^3 - 2 \,..$$

Persamaan ini mempunyai satu titik kritis yaitu $\bar{x} = \sqrt[3]{2}$. Titik kritis ini tak stabil sebab

$$\frac{d}{dx}(x^3-2)\Big|_{\bar{x}=\sqrt[3]{2}} = 3x^2 \; 3.(\sqrt[3]{2})^2 > 0 .$$

Untuk $\lambda = 12$, maka persamaan menjadi

$$\dot{x} = x^3 - 12x - 2 \, . \, - - - \, 1$$

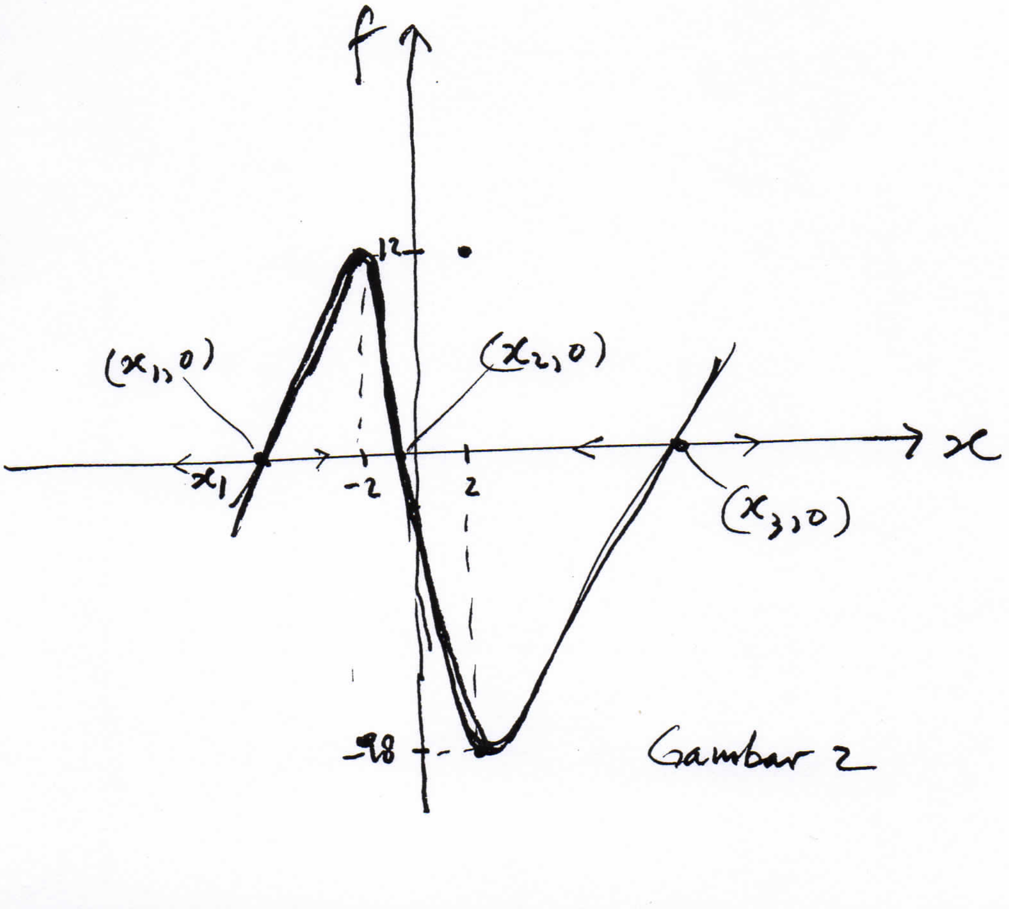
Misalkan $f(x) = x^3 - 4x - 2$. selanjutnya akan digambarkan grafiknya pada bidang $f-x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12$ dan $f''(x) = 6x$.

$f'(x) = 0 \iff 0 = 3x^2 - 12 \iff x = \pm 2$.

$x = 2 \longrightarrow f''(2) = 12 > 0$, maka $(2, -18)$ titik balik min

$x = -2 \longrightarrow f''(-2) = -12 < 0$, maka $(-2, 12)$ titik balik max



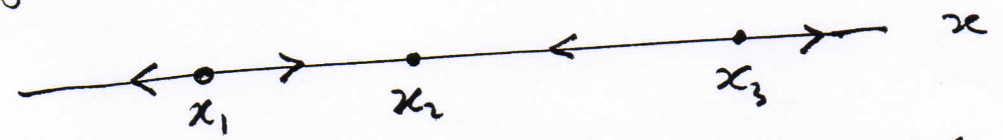
Gambar 2

(K5)

Tampak dari Gambar 2, $f(x)=0$ untuk $x=x_1$, $x=x_2$ dan $x=x_3$. Jadi persamaan ① mempunyai tiga titik kritis yaitu x_1, x_2 dan x_3.

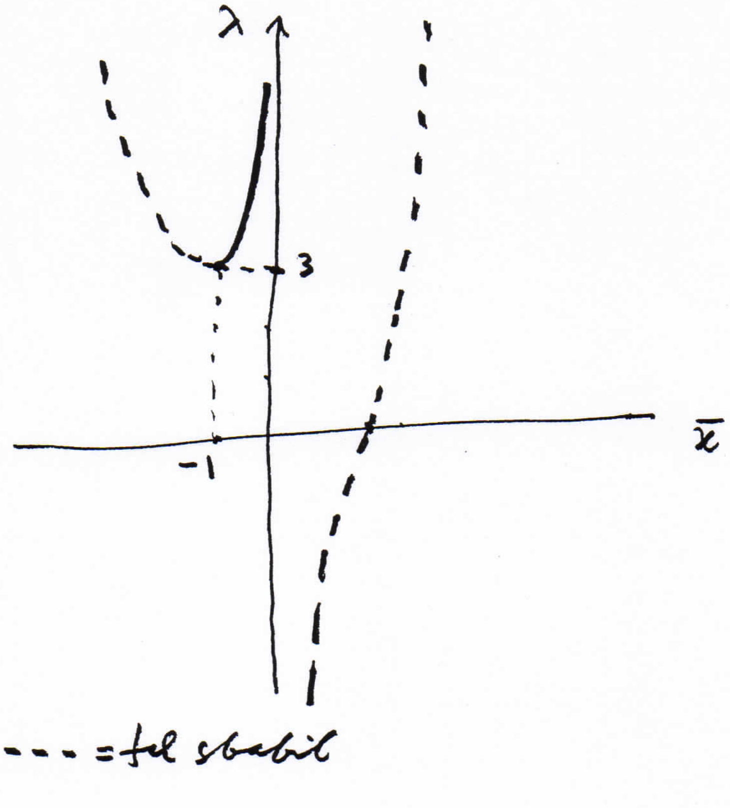
Disamping itu $f(x)<0$ untuk $x<x_1$, karena $\dot{x}=f(x)$ maka ~~x~~ $\dot{x}<0$ untuk $x<x_1$. Dengan demikian nilai x mengecil ~~untuk~~ pada ~~daerah~~ interval $x<x_1$. Sedangkan pada interval $x_1<x<x_2$, $f(x)$ bernilai positip. Jadi $\dot{x}>0$ pada interval $x_1<x<x_2$ artinya x membesar pada interval tsb.

Analog dengan argumen di atas maka phase portrait dari persamaan ① sbb:



Dengan demikian ~~x~~ titik kritis x_1 tak stabil, x_2 stabil dan x_3 tak stabil.

Dari uraian di atas, maka disimpulkan bahwa diagram bifurkasinya sbb:



Ket: - - - - = tak stabil