BAHAN AJAR 2 KALKULUS DIFERENSIAL

Oleh: ENDANG LISTYANI

Pengkajian mendalam tentang limit

Misalkan diketahui fungsi f(x) = $\frac{2x^{2}-x-1}{x-1}$

Jika nilai x mendekati 1, maka dapat dilihat dengan jelas pada tabel berikut

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0,8 | 0,9 | 0,99 | 0,999 | ... | 1 | ... | 1,001 | 1,01 | 1,1 | 1,2 |
| f(x) | 2,6 | 2,8 | 2,98 | 2,998 | ... | 3 | ... | 3,002 | 3,02 | 3,2 | 3,4 |

Dari tabel kita dapat mencatat berbagai hal berikut:

* Jarak f(x) ke 3 dapat dibuat kurang dari 0,002 dengan cara mengambil x yang jaraknya ke 1 kurang dari 0,001 dan x ≠1

Dengan perkataan lain, jika x ≠1 dan jarak x ke 1 kurang dari 0,001, maka jarak f(x) ke 3 dapat dibuat kurang dari 0,002

* Dengan menggunakan lambang matematika, hal ini dapat ditulis sebagai berikut

Jika 0,999 < x < 1,001, maka 2,998 < f(x) < 3,002

atau

* Jika 0 < $\left|x-1\right|$ < 0,001 maka $\left|f\left(x\right)-3\right|$ < 0,002

Secara umum, ini berarti jika x cukup dekat ke 1, maka f(x) dapat dibuat sedekat mungkin ke 3, dan dinyatakan sebagai 

**Selanjutnya kita lihat situasi yang lebih umum**

Misalkan ε dan δ bilangan positif kecil

 



y=f(x)

Situasi gambar ini menyatakan 

L+ε

L

 

L- ε

 δ δ

c-δ

c +δ

c

**Definisi**

 Artinya : Untuk setiap ε > 0 yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat δ > 0 sehingga jika 0 <  < δ maka < ε

Contoh 1

Buktikan dengan definisi ε dan δ bahwa 

Bukti

Pendahuluan:

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan δ >0** sehingga jika  maka 

(jalan mundur)  = 2  , pilih δ = 

**Bukti formal:**

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat** = , sehingga jika  maka 

Contoh 2

Buktikan dengan definisi ε dan bahwa 

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

=  =< ε, pilih = ε

Bukti formal

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat** = , sehingga jika  maka

=  =< = ε

Contoh 3

Buktikan 

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

= 

Karena faktor yang kedua dapat dibuat kecil seperti yang kita inginkan (pernyataan jika ), maka kita batasi faktor  dengan cara, pilih 1, kemudian akan menghasilkan:

 = + 5 (ketaksamaan segitiga)

 < 1 + 5 = 6

Dengan demikian kita juga mensyaratkan  sehingga hasil kali  akan lebih kecil dari ε

Bukti formal

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat** = min{1, } , sehingga jika  maka = < 6. = ε

Contoh 4

Buktikan

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

 = 

Karena diketahui bahwa < , pilih = 1 untuk menentukan batas dari 

=+ 2(ketaksamaan segitiga)

 < 1 + 2

Dengan demikian kita juga mensyaratkan  sehingga hasil kali  akan lebih kecil dari ε

Bukti formal

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat** = min{1, } , sehingga jika  maka < (1 + 2)()< = ε

* 

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

= 2 < ε , pilih = 

* 

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

=  =< ε, pilih = ε

* 

Bukti pendahuluan

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

 =  = 3< ε , pilih  = 

* 

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 

 = = = < < ε

Pilih  = 2 ε

Bukti formal

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat** = 2, sehingga jika  maka

 = = = < < == ε

Soal no 13



Bukti

Diberikan ε > 0 sebarang, **akan ditentukan**  **>0** sehingga jika  maka 



 = 

 = 

 = 

Pilih  =  maka  mengakibatkan 3  x  4

Jika kita ambil x yang terkecil yaitu 3 mengakibatkan

 

 = 

Dengan demikian kita juga mensyaratkan  sehingga hasil kali  akan lebih kecil dari ε

Bukti formal

Diberikan ε > 0 sebarang, **terdapat**  **= min {** } sehingga jika  maka  

  

 < 