**BAHAN AJAR KALKULUS LANJUT**

**Oleh: ENDANG LISTYANI**

**KALKULUS LANJUT**

1. **INTEGRAL RANGKAP DUA**

**1. Integral Rangkap Dua Atas Daerah Persegi Panjang**

Konsep integral tentu untuk fungsi satu peubah dapat kita perluas untuk fungsi dua variabel. Integral untuk fungsi dua variabel disebut integral integral rangkap dua. Untuk integral rangkap dua dari fungsi dua variabel daerah batasnya terdefinisi pada suatu daerah tertutup di R2. Berikut ini apabila fungsi dua variabel terdefinisi pada daerah persegi panjang.

x

b

a

d

c





z

y

 Gambar 1

Misalkan R berupa daerah persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yakni: R : {(x,y) :  }. Dibentuk suatu partisi dengan cara membuat garis-garis sejajar sumbu x dan y. Ini membagi R menjadi n persegi panjang kecil , yang ditunjukkan dengan k = 1,2,...n. Tetapkan  dan  adalah panjang sisi-sisi  dan  = . adalah luas. Pada  ambil sebuah titik misal  dan bentuk penjumlahan Riemann .

**Definisi :**

**Integral Rangkap dua**

Andai suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R, jika :

 ada . maka f dapat diintegralkan pada R, lebih lanjut , yang disebut integral rangkapdua dan pada R diberikan oleh

 = 

**Sifat-sifat Integral Rangkap Dua :**

1. Jika f(x,y) dan g(x,y) masing-masing kontinu dalam daerah R maka:





1. 
2. Sifat pembanding berlaku jika f(x,y)  g(x,y) untuk semua (x,y) di R, maka :



Contoh Soal

1. Misalkan f didefinisikan sebagai berikut

 f(x,y) = 

hitung  dengan R = {

jawab :

misal persegi panjang R1, R2, R3

R1 = {

R2 = {

R3  = {,

gunakan sifat penjumlahan di integral rangkap dua, diperoleh :

+ +

 = 1.A(R1) + 2. A(R2) + 3.A(R3)

 = 1.3 + 2.3 + 3.3

 = 18

2. Tentukan dengan ,

R = {, dengan menghitung jumlah Riemann

Jawab :

Penjumlahan Riemann yang diperoleh dengan membagi atas 8 bujur sangkar yang sama dengan tiap-tiap pusat bujur sangkar sebagi titik. Titik-titik contoh yang diperlukan dan nilai-nilai yang berpadanan dari fungsi itu adalah :

|  |  |
| --- | --- |
| = (1,1), f= = (1,3), f = = (1,5), f= = (1,7), f=  | = (3,1), f= = (3,3), f= = (3,5), f= = (3,7), f=  |

z

(0,8,8)

(0,0,4)

(4,0,2)

(4,8,6)

(4,8)

8

4

y

x

Jadi karena  = 4, = = 2.2 = 4

≈

 = 

 = 

 = 138

**Soal**

*Hitung :*

1. 
2. 
3. 

**Volume dengan Integral Rangkap dua**

Jika  pada R sehingga dapat kita tafsirkan integral lipat dua sebagai volume dari benda pejal dibawah permukaan gambar 1

V = , R = {.

R

b

a

a

b

Gb. 1

 Gambar 2

Dibuat Irisan pada benda pejal itu menjadi kepingan-kepingan sejajar terhadap bidang xz (gb. 3)

z

y

LA(y)

Gb. 2b

x

Gb. 3

y



Irisan bidang y = k, kepingan volume yang berpadanan ≈ A(y) 

Volume dari kepingan secara aproksimasi diberikan oleh ≈ A(y) , diintegralkan ,

V = , untuk y tetap kita hitung A(y) dengan integral tunggal biasa :

A(y) = , sehingga : V =  …….. (2)

Dari (1) dan (2) :

 =  begitu juga = 

Contoh

Hitung volume V dari benda pejal diatas yang dibatasi oleh z = 4 – x2 –y dan dibawah persegi panjang R = {

Jawab :

z

(0,0,4)

(0,2,2)

(1,0,3)

(1,2,1)

y

2

1

(1,2)

x

Jawab :

V = 

 =  = 

 = = 

 =  satuan volum

**Soal**

1. Misalkan R = {.

,,  , , 

Hitung 

2. Misalkan R = , }

 , }

 , }

 Jika  = 3, =5, = 2, tentukan :

1. 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. 

3. Hitung :

1. 

|  |
| --- |
|  |

1. 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Hitung volume benda pejal yang diberikan benda pejal dibawah bidang z = x+y+1 diatas R = {

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Soal-soal

1. Hitung  jika R = {!

2. Hitung volume benda pejal yang diberikan benda pejal dibawah bidang z = 2x + 3y atas R = {