1 Kinematika partikel

1.1 PENDAHULUAN

Dalam menyelidiki gerak sebuah benda kita dapat mengajukan dua pertanyaan. Pertama, bagaimanakah benda tersebut bergerak? Kedua, bagaimanakah hubungan antara gerak benda dengan penyebab gerak tersebut? Jawaban pertanyaan pertama akan kita dapat, jika dengan suatu cara kita dapat menentukan letak benda pada setiap saat. Dari informasi ini dapat kita tentukan kemudian berapa cepat benda tersebut bergerak dan bagaimana kecepatannya berubah dengan waktu. Cara menyelidiki dan menyatakan gerak benda, tanpa memandang sebab-musababnya, merupakan bagian mekanika yang disebut *kinematika*. Jadi, di dalam kinematika kita menyelidiki letak benda sebagai fungsi waktu, yaitu dengan mencatat letak benda atau memotretnya pada setiap selang waktu. Ambillah sebagai contoh gerak bumi mengelilingi matahari. Pengetahuan kita mengenai hal itu diperoleh secara bertahap. Pada abad ke-16, Copernicus menyatakan bahwa pemerian (deskripsi) gerak bumi lebih sederhana jika dipandang bahwa bumi mengelilingi matahari. Untuk menentukan kedudukan bumi terhadap waktu, Tycho Brahe (1546-1601) mengamati letak bintang. Pengamatannya yang sangat teliti memungkinkan Johannes Kepler, seorang asisten Brahe, menentukan bahwa bumi bergerak mengitari matahari dengan lintasan berbentuk elips.

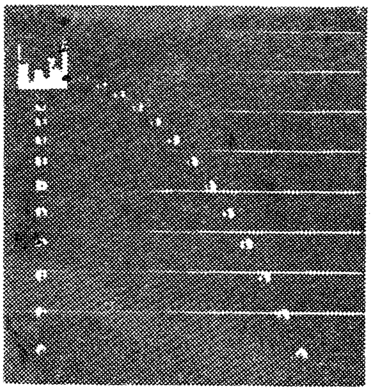
Untuk menjawab pertanyaan kedua kita dapat memberikan penjelasan sebagai berikut: Karena adanya tarikan atau dorongan, yang disebut gaya, laju dan arah gerak benda dapat berubah. Jadi, ada hubungan antara gerak sebuah benda dengan gaya yang bekerja padanya. Jika kita mengetahui bagaimana suatu benda bergerak, kita akan dapat menentukan gaya yang menyebabkan gerak benda tersebut. Bagian mekanika yang mencari hubungan antara gaya dan gerak disebut *dinamika*.

Seperti diuraikan di atas, Kepler memecahkan kinematika gerak bumi terhadap matahari, yaitu dengan diperolehnya informasi mengenai letak, bumi terhadap matahari sebagai fungsi waktu. Dari kesimpulan Kepler, Sir Isaac Newton (1642-1727) menyimpulkan, gaya macam apa yang ada antara bumi-matahari sehingga terjadi gerak seperti yang diperoleh Kepler. Dengan demikian Newton menciptakan cabang dinamika dari mekanika.

1.2 GERAK PARTIKEL

Jika kita perhatikan sebuah tongkat yang kita lemparkan, maka tampak bahwa di samping berpindah dari satu tempat ke tempat lain, tongkat juga berputar. Gerak yang berhubungan dengan perpindahan seluruh

bagian tongkat dari satu tempat ke tempat lain disebut *translasi.* Dalam gerak putar (rotasi) ada bagian yang tidak berpindah tempat, yaitu pada sumbu putar. Pada umumnya gerak satu benda dapat dianggap sebagai campuran antara gerak translasi dan gerak rotasi.
Jika benda yang kita bahas mempunyai ukuran jauh lebih kecil dari lintasan translasi, maka kita dapat mengabaikan gerak rotasi, sehingga untuk benda semacam ini kita cukup membahas gerak translasi. Benda seperti ini disebut *partikel* atau *benda titik,* artinya dalam memandang geraknya, benda dapat kita ganti dengan sebuah titik.
Sebenarnya, dalam alam tidak ada benda yang betul-betul berupa titik. Akan tetapi pengertian partikel bermanfaat, sebab gerak benda yang sebenarnya seringkali dapat didekati dengan gerak partikel. Sebagai contoh, jika kita pandang jarak dari bumi ke matahari, maka terhadap jarak ini, bumi dan matahari dapat dianggap sebagai partikel. Dalam bab ini kita hanya membahas kinematika partikel. Di dalam kinematika kita menyelidiki gerak benda dengan menentukan letak atau posisi benda pada setiap saat.



GB. 1-1 POTRET STROBOSKOPIK DARI GERAK SEBUAH BENDA

Dalam gerak yang sederhana, misalnya jika benda bergerak pelan pada garis lurus, maka kita dapat mempergunakan arloji dan menandai letak benda pada setiap saat. Kemudian kita catat letak benda sebagai fungsi waktu.
Untuk benda yang bergerak cepat dan lintasan yang umum, kita harus menggunakan kamera dengan perlengkapan khusus. Pemotretan dilakukan dalam ruang gelap, dan penutup *(shutter)* kamera berada dalam keadaan terbuka.
Selama bergerak, benda disinari lampu pada saat-saat tertentu, dalam waktu yang sangat pendek.
Jika film dicetak akan kita peroleh gambar seperti pada Gb. 1-1. Dari gambar ini kita peroleh letak benda sebagai fungsi waktu.

1.3 KECEPATAN DAN PERCEPATAN

Kecepatan
Di dalam mengamati gerak sebuah partikel kita mencatat letak partikel sebagai fungsi waktu. Marilah kita bahas gerak yang sederhana lebih dahulu, yaitu gerak pada garis lurus. Ini disebut *gerak lurus.*
Satu contoh gerak lurus adalah gerak sebuah batu kecil jika dilepaskan dari suatu ketinggian *(gerak jatuh bebas).* Potret stroboskopik dari gerak ini dapat dilihat pada Gb. 1-1 (bola sebelah kiri).
Dari gambar seperti ini kita dapat membuat suatu tabel yang menyatakan letak benda pada tiap saat. Karena benda bergerak lurus, maka dapat kita gunakan sumbu X untuk menyatakan letak benda. Suatu tabel gerak jatuh bebas dapat dilihat pada Tabel 1-1.
Berapa cepat letak benda berubah kita sebut *kecepatan* benda. Untuk menyatakan laju perubahan letak benda ini dipergunakan dua pengertian yaitu *kecepatan rata-rata* dan *kecepatan sesaat.*

TABEL 1-1

t(det)	X(m)
0	0
1	-4,9
2	-19,6
3	-44,1
4	-78,4
5	-122,5

Misalkan pada saat t_1 benda berada di x_i, dan benda saat t_2 berada di x_2; sedang selang waktu antara t_1 dan t_2 kita nyatakan dengan Δt; jadi $\Delta t = t_2 - t_1$. Perubahan letak benda dalam selang waktu ini kita nyatakan sebagai $\Delta x = x_2 - x_1$. Besaran Δx kita sebut *perpindahan*. Kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu ini kita tulis sebagai

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1-1}$$

Nyata bahwa kecepatan rata-rata ini bergantung pada besar selang waktu Δt dan saat t ini. Jika kita gunakan data pada Tabel 1-1, nilai rata-rata kecepatan dalam gerak ini untuk berbagai nilai selang waktu ditunjukkan pada Tabel 1-2.

TABEL 1-2

t_1	t_2	Δt	x_1	x_2	Δx	$\bar{v}$
0	1 det	1 det	0 m	-4,9 m	-4,9	-4,9 m/det
2	3	1	-19,6	-43,1	-33,3	-33,3
0	2	2	0	-9,8	-9,8	-4,9
0	3	3	0	-43,1	-43,1	-14,3

Pada tabel kita lihat Δx adalah negatif. Ini berarti bahwa benda bergerak ke arah sumbu x- negatif. Begitu juga kita lihat kecepatan rata-rata mempunyai nilai negatif. Nyata bahwa kecepatan rata-rata $\bar{v}$ bergantung pada besar selang waktu Δt, dan juga pada saat ap. selang waktu ini diambil. Kecepatan rata-rata ini memberi keterangan kasar tentang gerak benda dalam suatu selang waktu. Kita tidak peduli bagaimana letak benda berubah dengan waktu *di dalam* selang ini, yang penting hanyalah letak benda pada *awal* dan *akhir selang* waktu ini. Seringkali kita ingin tahu berapa kecepatan benda pada *suatu saat tertentu*. Kita tidak puas dengan mengetahui kecepatan rata-rata dalam suatu selang waktu Δt, akan tetapi kita ingin tahu nilainya pada suatu saat t tertentu. Di sini kita berhubungan dengan *kecepatan saat* benda. Jelas bahwa kita dapat menentukan kecepatan pada saat t, jika kita hitung kecepatan rata-rata dalam selang waktu Δt di sekitar saat t, dan selang waktu Δt ini kita perkecil terus hingga menjadi nol. Ini kita nyatakan secara kuantitatif sebagai berikut:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1-2}$$

Kembali pada contoh kita pada Tabel 1-1. Jika kita ingin menentukan kecepatan pada saat t = 3 detik, misalnya, kita harus melakukan pengukuran sangat teliti di sekitar saat t = 3 detik, agar kita dapat menentukan berapa besar lim $\bar{v}$ jika selang waktu $\Delta t \to 0$. Misalkan hasil pengukuran kita adalah seperti pada Tabel 1-3.
Nyata bahwa jika $\Delta t \to 0$, maka $\Delta x \to 0$, tetapi $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ tidaklah mendekati nilai nol, akan tetapi menuju suatu nilai tertentu.

TABEL 1-3

t_1	t_2	Δt	x_1	x_2	Δx	V
3 det	4,00 det	1 det	-44,1 m	-78,40 m	34,30 m	34,30 m/det
3	3,50	0,50	"	-60,22	15,92	31,84
3	3,20	0,20	"	50,18	6,08	30,44
3	3,10	0,10	"	47,09	2,99	29,90
3	3,05	0,05	"	45,58	1,48	29,60
3	3,02	0,02	"	44,69	0,59	29,50
3	3,01	0,01	"	44,395	0,295	29,5 m/det

Nilai ini adalah

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v(t)$, yaitu *kecepatan sesaat* pada saat t.

Seringkali sebagai ganti tabel antara waktu t dan letak x *kita mengetahui bentuk fungsi* $x(t)$. Dalam hal ini perpindahan Δx adalah beda posisi pada saat $(t + \Delta t)$ dengan posisi pada saat t.
Jadi $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, sehingga kecepatan sesaat $v(t)$ dapat ditulis sebagai

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Akan tetapi

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ adalah definisi *diferensial*

$x(t)$ terhadap Δt, yaitu $\dfrac{dx}{dt}$. (Lihat Apendiks A)

Nyata bahwa kecepatan sesaat

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{1-3}$$

Sebagai contoh, misalkan kita mengetahui bahwa fungsi $x(t)$ mempunyai bentuk

$x(t) = 5\ t^3$

maka kecepatan sesaat

$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5\ t^3) = 15\ t^2$

Pada $t = 2$ detik, misalnya, kecepatannya adalah

$v = 15 \times 2^2$ m/det $= 60$ m/det

Percepatan
Pada umumnya kecepatan benda juga berubah terus dengan waktu. Seringkali kita ingin mengetahui berapa cepat perubahan ini terjadi. Laju perubahan kecepatan ini disebut *percepatan*. Seperti halnya pada kecepatan, kita dapat pergunakan pengertian *percepatan rata-rata* atau *percepatan sesaat*.
Jika pada saat t_1 benda mempunyai kecepatan sesaat v_1 dan pada saat t_2

kecepatan v_2, maka *percepatan* [illegible] dalam selang waktu $\Delta t = t_2 - t_1$ dinyatakan oleh

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (1\text{-}4)$$

dengan $v = v_2 - v_1$ adalah perubahan kecepatan selang waktu tersebut. Analog dengan pengertian kecepatan, *percepatan sesaat* pada saat t dinyatakan oleh

$$a(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}5)$$

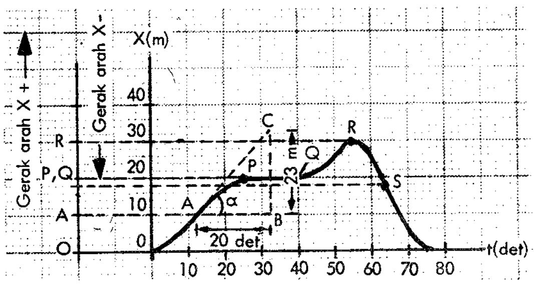
Jika kita mengetahui bentuk fungsi v(t), percepatan a(t) dapat ditulis sebagai

$$a(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

yaitu turunan pertama v(t) terhadap t.

Deskripsi grafik

Pengukuran posisi benda pada berbagai saat dapat kita nyatakan dengan beberapa cara. Kita sudah membahas kecepatan dan percepatan benda jika data gerak x - t ada dalam bentuk tabel dan bentuk fungsi x(t). Cara ketiga untuk menyatakan data pengukuran adalah dengan *grafik* x - t. Ini ditunjukkan pada Gb. 1-2.

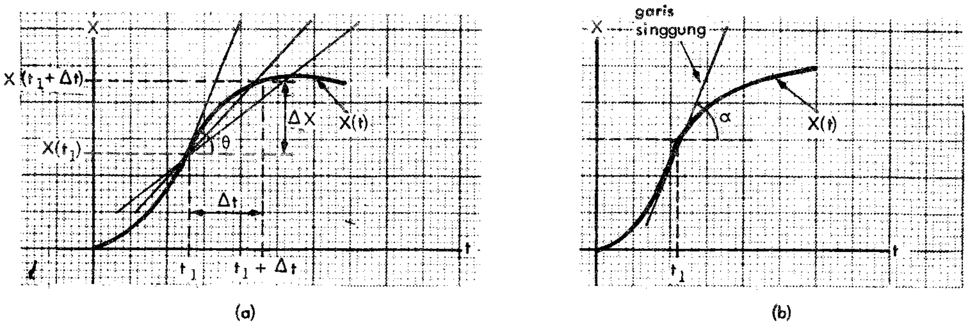


GB. 1-2 GRAFIK X- T

Sumbu vertikal menyatakan letak x, dan sumbu horizontal menyatakan waktu t.
Grafik x - t ini diperoleh dari pengamatan gerak. Pada saat t = 0 benda mulai bergerak sepanjang x dipercepat sampai saat t = 12 detik. Antara t = 12 detik dan t = 26 detik benda bergerak diperlambat, berhenti antara saat t = 26 detik sampai t = 40 detik. Pada saat t = 40 detik benda bergerak lagi ke arah X positif. Pada saat t = 55 detik benda berbalik arah. Akhirnya berhenti di x = 0, pada t = 80 det. Seringkali *bentuk fungsi x(t)* dari grafik yang bersangkutan tidak dapat ditentukan. Akibatnya kita tidak dapat menggunakan persamaan 1-3 untuk menghitung kecepatan sesaat v(t), ataupun persamaan 1-5 untuk menentukan percepatan a(t). Bagaimana kita dapat menentukan kecepatan pada saat $t = t_1 = 12$ detik dari grafik x - t (pada Gb. 1-2).
Agar lebih jelas, bagian grafik di sekitar saat t_1 kita lukiskan lagi pada Gb. 1-3.

Kita pergunakan

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \operatorname{tg} \theta$$



GB. 1-3 JIKA $\Delta T \to 0$ MAKA $\bar{V} = \frac{\Delta X}{\Delta t}$ MENDEKATI tg α , YAITU KOEFISIEN ARAH GARIS SINGGUNG GRAFIK PADA $t = t_1$

Dari Gb. 1-3b nyata bahwa $v(t_1)$ = tg α, yaitu koefisien arah garis singgung grafik $x(t)$ pada nilai $t = t_1$

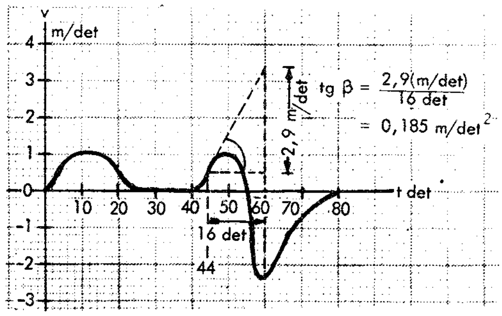
atau $v(t_1) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_1} = \text{tg } \alpha$

Pada Gb. 1-2 ditunjukkan bagaimana menentukan kecepatan pada saat t = 12 detik. AC adalah garis singgung lengkungan $x(t)$ pada t = 12 detik. Segitiga ABC siku-siku dibuat sembarang. Nyata bahwa tg $\alpha = \frac{BC}{AB}$,

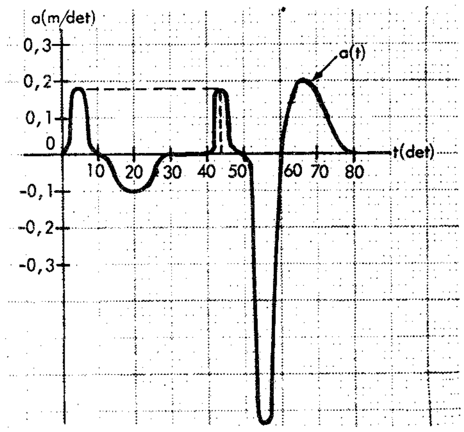
sehingga $v(t = 12) = \frac{BC}{AB} = \frac{23 \text{ m}}{20 \text{ detik}} = 1{,}15$ m/det.

Jelas bahwa pada bagian-bagian kurva $x(t)$ yang lurus kecepatan $v(t)$ adalah tetap.

Jika kita hitung kecepatan untuk berapa nilai t, dan kita buat grafik $v(t)$, kita akan memperoleh Gb. 1-4.



GB. 1-4 GRAFIK v - t



GB. 1-5 KURVA a - t

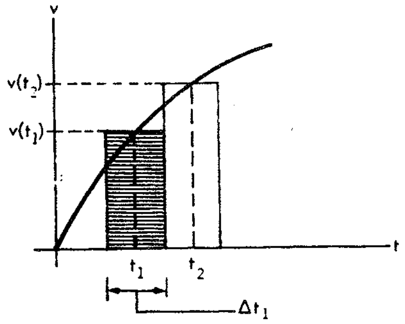
Nyata bahwa benda berhenti antara t = 24 sampai t = 40 detik, kemudian berangkat lagi pada arah x-positif.
Pada t = 56 detik benda berbalik lagi pada arah x.
Selanjutnya kita dapat menentukan percepatan $a(t)$ pada suatu saat t dari hubungan $a(t)$ = kemiringan garis singgung kurva $v(t)$ pada saat t.
Kurva $a(t)$ ditunjukkan pada Gb. 1-5.

1.4 MENENTUKAN PERSAMAAN GERAK X (t)

Pada gerak lurus *persamaan gerak* diberikan oleh hubungan $x = f(t)$. Hubungan ini mungkin berbentuk tabel, grafik atau fungsi. Jika persamaan gerak ini sudah diketahui kita dapat menentukan besaran-besaran yang lain, seperti kecepatan dan percepatan, dari persamaan gerak ini. Dalam menentukan persamaan gerak ini *posisi* benda pada tiap saat diukur.

Sekarang misalkan kita berada dalam sebuah mobil yang sedang *bergerak lurus*. Kecepatan setiap saat dapat kita baca dari alat ukur kecepatan atau speedometer yang ada di kendaraan. Dalam hal ini kita dapat mengamati v(t), akan tetapi kita tidak dapat langsung menyatakan dimana kita berada setiap saat, atau x(t). Bagaimana kita dapat menentukan persamaan gerak jika kita tahu v(t)?

Misalkan fungsi v(t) kita lukiskan sebagai suatu grafik seperti pada Gb. 1-6.

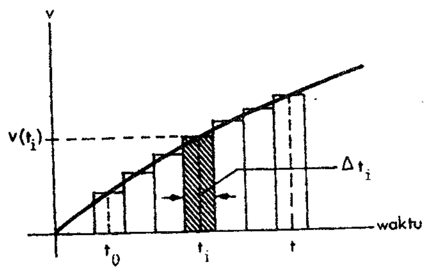


GB. 1-6 FUNGSI V(t) KITA PEROLEH DARI PENGAMATAN. JARAK YANG DITEMPUH DALAM SELANG WAKTU Δt_1 SEKITAR SAAT t_1 DINYATAKAN OLEH LUAS BAGIAN TERARSIR

Tampak bahwa kecepatan v berubah dengan waktu. Kita dapat menentukan perpindahan benda dalam suatu selang waktu tertentu sebagai berikut.

Kita pandang suatu selang waktu Δt_1 sekitar saat $t = t_1$. Selang Δt_1 dapat kita ambil sekecil mungkin hingga dalam selang waktu ini v(t) dapat dianggap tetap nilainya, yaitu sama dengan $v(t_1)$. Nilai $v(t_1)$ ini tidak lain adalah nilai kecepatan rata-rata dalam selang waktu Δt_1 sekitar saat t_1. Ini ditunjukkan pada Gb. 1-6, dimana Δt_1 diperlihatkan sangat diperbesar. Perpindahan yang ditempuh dalam selang waktu ini adalah $\Delta x_1 = v(t_1)\ \Delta t_1$. Dari Gb. 1-6 nyata bahwa perpindahan ini tidak lain adalah *luas* bagian yang diarsir. Satuan "luas" di sini haruslah (m/det) × (det) = m, yaitu satuan panjang.

Sekarang bagaimana kita menentukan perpindahan yang ditempuh dalam suatu selang waktu yang besar, misalnya dari suatu saat t_0 sampai saat t? Perhatikan Gb. 1-7.



GB. 1-7 UNTUK MENENTUKAN PERPINDAHAN YANG DITEMPUH DALAM SELANG WAKTU ANTARA t_0 SAMPAI t, SELANG INI KITA BAGI MENJADI N BUAH SELANG KECIL

Untuk menentukan ini selang waktu antara t_0 dan t kita bagi menjadi N buah selang kecil-kecil. Kita anggap bahwa dalam tiap selang waktu ini kecepatan benda adalah tetap. Perpindahan yang ditempuh dalam selang waktu Δt_1 sekitar t_1 adalah $\Delta x_1 = v(t_1)\Delta t_1$. Dalam selang berikutnya yaitu Δt_2, perpindahan yang ditempuh adalah sebesar $\Delta x_2 = v(t_2)\ \Delta t_2$.

Jadi perpindahan yang ditempuh dalam selang $\Delta t_1 + \Delta t_2$ antara t_1 dan t_2 adalah $\Delta x_1 + \Delta x_2 = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2$.

Pada gambar 1-7, perpindahan ini dinyatakan oleh luas dua segi empat berturutan

Jelas bahwa perpindahan yang ditempuh dalam selang waktu antara t_0 dan t dapat ditulis sebagai

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \qquad (1\text{-}6)$$

dengan Δx_i adalah perpindahan yang terjadi selang waktu Δt_i sekitar $t = t_i$.
Perpindahan ini adalah

$$\Delta x_i = v(t_i)\Delta t_i$$

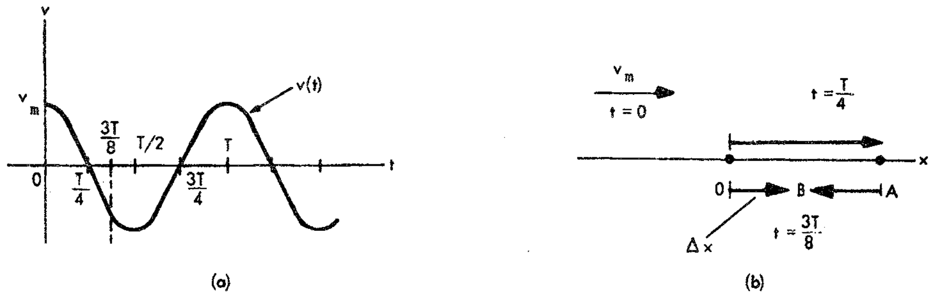
Dalam ungkapan ini Δt_i haruslah diambil sekecil mungkin hingga kecepatan rata-rata dalam selang waktu ini menjadi sama dengan kecepatan sesaat untuk $t = t_i$, yaitu $v(t_i)$.
Selanjutnya persamaan 1-6 dapat kita tuliskan sebagai

$$\Delta x = x(t) - x_0 = \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t_i \qquad (1\text{-}7)$$

Karena dalam persamaan 1-7 Δt_i harus diambil kecil sekali, atau $\Delta t_i \to 0$, maka nilai N haruslah besar sekali, dan penjumlahan (1-7) adalah suatu *penjumlahan kontinu*, sehingga dapat ditulis sebagi integral

$$\Delta x = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad (1\text{-}8)$$

Persamaan (1-8) menyatakan bahwa perpindahan yang ditempuh dapat diperoleh dari integral v(t) terhadap t. Perhatikan bahwa tanda integral "$\int$" tidak lain adalah tanda jumlah "Σ" untuk penjumlahan kontinu. Keduanya berarti huruf S, untuk *summation*, yaitu kata Inggris untuk penjumlahan.
Pembahasan lebih lengkap mengenai pengertian integral dapat dibaca pada Apendiks B.
Persamaan (1-8) juga menyatakan bahwa pergeseran Δx dalam selang waktu antara t_0 dan t adalah sama dengan luas daerah grafik v - t antara lengkungan v(t) dengan sumbu t. Jika daerah ini ada di atas sumbu t, luas dinyatakan sebagai bilangan positif, dan berarti benda bergeser ke arah x-positif. Jika daerah ini ada di bawah sumbu t, luas ini dinyatakan negatif, yang berarti benda bergeser ke arah sumbu x- negatif.
Sebagai contoh perhatikan Gb. 1-8.



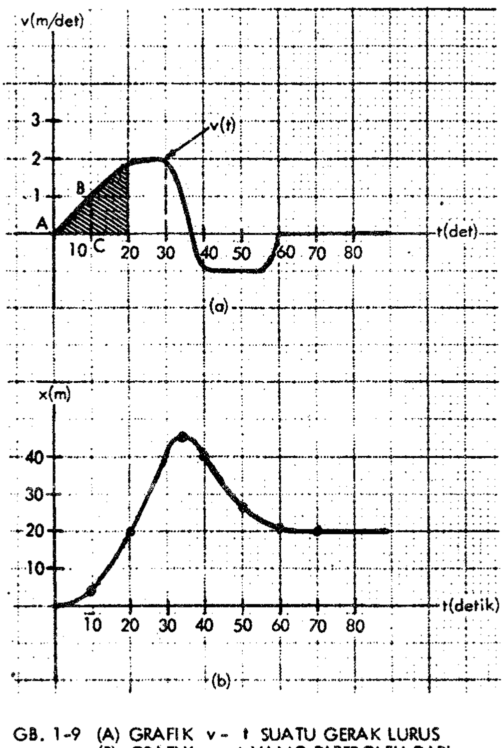
GB. 1-8 (A) LENGKUNGAN v(t) BERBENTUK SINUS.
(B) POSISI BENDA DAN PERPINDAHAN DALAM SELANG ANTARA $t = 0$ DAN $t = \frac{3T}{8}$.
PADA $t = \frac{T}{4}$ BENDA BERADA DI A, PADA $t = \frac{3T}{8}$ BERADA DI B.

Lengkungan v(t) adalah satu fungsi cosinus dengan $v = f(t) = V_m \cos bt$, dengan b suatu tetapan.
Pergeseran yang ditempuh dalam selang waktu antara 0 dan T/4 adalah positif, pergeseran benda adalah pada arah x-positif. Dalam selang antara t = T/4 dan t = 3T/8 luas adalah negatif, dalam selang ini ben-

da bergeser ke arah x-negatif. Dalam selang antara $t = 0$ dan $t = 3T/8$ luas total adalah positif, sehingga pergeseran total dalam selang ini adalah masih dalam arah x-positif. Ini ditunjukkan pada Gb. 1-8b.
Pada saat $t = 0$ benda sedang bergerak dengan kecepatan V_m ke arah x positif. Pada saat $t = T/4$ benda sampai di A dan berhenti, kemudian berbalik arah, bergerak menuju ke arah x-negatif, dan pada saat $t = 3T/8$ berada di B. Perpindahan total dalam selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 3T/8$ adalah Δx dan pada arah x-positif.
Jadi kesimpulan kita adalah sebagai berikut. Jika kita mengetahui kecepatan benda setiap saat, yaitu $v(t)$, kita dapat menentukan persamaan gerak $x(t)$ dengan dua cara. Jika *bentuk fungsi* $v = f(t)$ *diketahui*, persamaan gerak $x(t)$ dapat dihitung dari

$$x(t) = \int v\, dt = \int f(t)\, dt.$$

Rumus-rumus untuk $\int f(t)dt$ dapat dilihat dalam tabel integral (Apendiks A). Akan tetapi jika data $v(t)$ adalah *dalam bentuk grafik*, dan bentuk fungsi $f(t)$ sukar ditentukan, persamaan gerak $x(t)$ dapat ditentukan dari $\Delta x = x(t) - x_0$ = luas daerah antara lengkungan $v(t)$ dengan sumbu t dalam grafik v - t; dengan x_0 adalah posisi benda pada saat $t = 0$.
Sebagai contoh perhatikan gambar 1-9a.
Grafik v-t diperoleh dari hasil pengukuran, misalnya pembacaan speedometer mobil pada berbagai nilai waktu. Nyata bahwa *bentuk* fungsi $v(t)$ sukar untuk ditentukan. Kita dapat menentukan grafik $x(t)$ sebagai berikut. Pergeseran $\Delta x = x(t) - x_0$ adalah sama dengan luas daerah antara lengkungan $v(t)$ dan sumbu t dari $t = 0$ sampai t. Sebagai contoh pada $t = 10$ detik $x(10) - x_0$ = luas segi tiga ABC = $\frac{1}{2} \times (1 \text{m/det}) \times (10 \text{ detik}) = 5$m.



GB. 1-9 (A) GRAFIK v - t SUATU GERAK LURUS
(B) GRAFIK x - t YANG DIPEROLEH DARI GAMBAR (A)

Jika x_0 kita ambil sama dengan nol, maka $x(10) = 5$m. Selanjutnya pada $t = 20$ detik $x(20) = \frac{1}{2} \times (2 \text{ m/det}) \times (20 \text{ detik}) = 20$ m.

Antara $t = 20$ det dan $t = 30$ det terjadi pergeseran sebesar $\Delta x = x(30) - x(20) = (2 \text{ m/det}) \times (10 \text{ det}) = 20$ m. Sampai dengan $t = 36$ detik gerak adalah pada arah x-positif. Mulai $t = 36$ detik kecepatan mempunyai tanda negatif, berarti benda mulai bergerak arah x-negatif. Pergeseran antara $t = 56$ detik sampai $t = 60$ detik adalah $\Delta x = x(60) - x(56) = \frac{1}{2} x(-1{,}3 \text{ m/det}) \times (4 \text{ detik}) = -2{,}6$ m/det.
Setelah $t = 60$ detik $v = 0$ berarti benda berhenti. Pada grafik x-t ini tampak sebagai $x = 20$ m, tak bergantung pada waktu. Jadi benda berhenti di tempat tersebut.
Dalam membahas suatu gerak lurus, seringkali kita mengetahui percepatan setiap saat, yaitu $a(t)$. Ini terjadi

jika tahu gaya yang bekerja pada benda setiap saat. Hubungan antara gaya dan percepatan akan dibahas dalam bab berikutnya.

Sudah kita ketahui percepatan sesaat $a(t) = \frac{dv}{dt}$.
Nyata bahwa perubahan kecepatan yang terjadi dalam selang waktu dt yang sangat kecil adalah $dv = a(t)\ dt$.
Hubungan ini adalah tepat seperti hubungan antara perpindahan dx yang terjadi dalam selang waktu dt, yaitu $dx = v(t)\ dt$.
Dengan pemikiran seperti yang telah diuraikan di depan, kita dapatkan bahwa kecepatan v(t) dapat dihitung dari

$$v(t) = \int a(t)\ dt \tag{1-9}$$

Jika kita mengetahui bentuk fungsi $a = f(t)$, kita dapat lakukan integrasi di atas. Akan tetapi, jika yang kita ketahui adalah bentuk grafik a(t), dan sukar menentukan bentuk fungsinya, grafik v(t) dapat ditentukan dengan menghitung luas daerah antara grafik a(t) dengan sumbu Δt, diambil dari saat $t = 0$ sampai saat Δt.

Gerak lurus dipercepat

Sebagai contoh pemakaian, marilah kita bahas lebih dahulu gerak lurus dengan percepatan tetap, yaitu yang disebut gerak lurus dipercepat beraturan. Karena percepatan a tetap, maka

$$\Delta v = v(t) - v_0 = \int_0^t a\ dt \tag{1-10}$$

$$= a \int_0^t dt = at$$

$$\text{atau } v(t) = v_0 + at \tag{1-11}$$

Selanjutnya perpindahan

$$\Delta x = x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)\ dt$$

$$= \int_0^t (v_0 + at)\ dt$$

$$= v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2$$

$$\text{atau } x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2 \tag{1-12}$$

Jika x_0 kita ambil sama dengan nol, maka dari persamaan 1-11 dan 1-12 dapat kita peroleh hubungan

$$v^2 = v_0^2 + 2\ ax \tag{1-13}$$

Persamaan ini memberi hubungan antara kecepatan benda dan jarak yang ditempuh. Persamaan ini hanya berlaku jika percepatan a adalah tetap. Akan tetapi jika kebetulan kita mengetahui nilai percepatan di setiap tempat, jadi $a = a(x)$, kita dapat turunkan hubungan seperti di atas sebagai berikut

$$dv = \frac{dv}{dx}\ dx = a\ dt \qquad (1\text{-}14)$$

atau $dv \dfrac{dx}{dt} = a\ dx$

sehingga $v\ dv = a\ dx$

$$\text{dan } \int_{v_0}^{v} v\ dv = \int_{0}^{x} a\ dx \qquad (1\text{-}15)$$

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \int_0^x a(x)\ dx$$

Jadi hubungan yang lebih umum adalah

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_0^x a(x)\ dx \qquad (1\text{-}16)$$

Jatuh bebas

Contoh yang paling sering dijumpai dari gerak lurus dengan percepatan tetap adalah gerak benda jatuh bebas dari tempat yang tidak terlalu tinggi. Jika tidak ada hambatan udara, maka didapatkan bahwa semua benda, tidak peduli ukuran, bentuk, atau beratnya, jatuh ke bumi dengan percepatan tetap, asal jarak yang ditempuh tidak terlalu besar. Gerak seperti ini, di mana hambatan udara dan perubahan percepatan terhadap ketinggian diabaikan, disebut gerak jatuh bebas.
Percepatan benda jatuh bebas disebut *percepatan gravitasi*, dan dinyatakan dengan g. Dekat dengan permukaan bumi besar percepatan ini adalah $g = 9{,}8$ m/detik^2 = 32.0 ft/detik^2, dan mempunyai arah menuju pusat bumi.
Hakekat benda jatuh pada jaman dahulu merupakan bahan pemikiran yang ramai dibahas orang. Aristoteles menyatakan, bahwa percepatan jatuh dari benda yang mempunyai berat adalah sebanding dengan ukurannya. Baru beberapa abad kemudian, seorang ilmiawan Italia bernama Galileo (1564-1642), menyarankan untuk memeriksa kebenaran pernyataan di atas dengan eksperimen, dan menyatakan bahwa pendapat Aristoteles tentang ini harus disanggah. Galileo menyatakan bahwa percepatan pada jatuh bebas tidak bergantung pada berat benda, ataupun bentuk benda. Pada hari tuanya, Galileo menulis buku bernama "Dialog tentang Dua Ilmu Baru", dimana diungkapkan studi yang cermat tentang gerak. Buku ini dapat dianggap sebagai titik awal ilmu dinamika.
Kepercayaan Aristoteles bahwa benda yang berat jatuh lebih cepat dari benda yang ringan masih banyak dianut orang. Rupanya pandangan ini diperoleh dari pengalaman sehari-hari, dimana jika sebuah bola dan secarik kertas dilepaskan dari suatu ketinggian, bola mencapai lantai lebih dahulu dari kertas. Akan tetapi jika pada percobaan ini kertas diremas lebih dahulu, maka bola dan kertas akan sampai di lantai hampir pada waktu bersamaan. Dalam hal yang pertama, hambatan udara pada kertas adalah yang menyebabkan kertas jatuh pelan. Dalam hal yang kedua hambatan udara pada kertas diperkecil dan menjadi sama dengan gesekan udara pada bola, sehingga kedua benda jatuh dengan kecepatan yang sama pula.

Kita dapat menguji lebih baik dengan tabung hampa udara. Dalam tabung hampa udara, selembar bulu akan jatuh sama cepat dengan sebuah bola kecil dari besi yang beratnya sepuluh kali lipat.
Pada zaman Galileo tidaklah mudah untuk membuat hampa udara.
Alat ukur waktu yang teliti untuk mengukur gerak juga tidak ada.
Meskipun demikian Galileo membuktikan kesimpulannya dengan mula-mula menyatakan bahwa sifat gerak bola yang menggelinding pada bidang miring adalah sama dengan bola yang jatuh bebas. Sebagai alat ukur waktu dipergunakan perubahan tinggi permukaan air pada bejana yang dilubangi bagian bawahnya. Bidang miring dipergunakan hanya untuk membuat agar percepatan lebih kecil sehingga gerak lebih mudah diukur. Galileo menunjukkan bahwa jika percepatan pada bidang miring adalah tetap, maka percepatan gravitasi pada arah vertikal juga harus tetap. Dari eksperimen ini Galileo mendapatkan bahwa untuk kemiringan tertentu percepatan gerak adalah tetap, tidak bergantung pada massa dari bola yang dipergunakan.

Contoh 1-1

Sebuah benda dilepaskan dan jatuh bebas. Tentukan posisi dan laju benda 1,00, 2,00, 3,00, dan 4,00 detik setelah benda dilepaskan.
Kita ambil titik benda dilepaskan sebagai titik asal sumbu y. Kita tahu kecepatan awal v_0, dan percepatannya yaitu g = 9,8 m/det^2.
Dalam membahas soal seperti ini kita harus tegas dalam memberi tanda, jika arah ke atas terhadap titik asal kita ambil positif dan arah ke bawah kita ambil negatif, kita harus tetap pada perjanjian tanda ini.
Dalam hal ini jarak di atas titik asal diberi tanda positif, jarak di bawah titik asal diberi negatif. Kecepatan dan percepatan ke atas diberi tanda positif, dan arah ke bawah diberi tanda negatif. Untuk benda jatuh bebas, kita tuliskan percepatan a = -g = -9,8 m/det^2, sehingga posisi pada saat t setelah dilepas adalah:

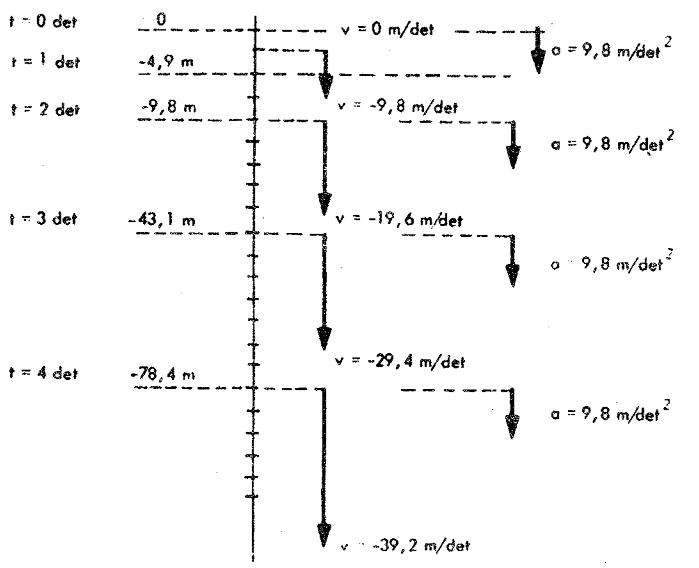
$$y = v_0 + \tfrac{1}{2} at^2 = v_0 - \tfrac{1}{2} gt^2$$

Kecepatan pada saat t dapat dihitung dari

$$v = v_0 + at = v_0 - gt$$

Kecepatan awal $v_0 = 0$, dan percepatan gravitasi g = 9,8 m/det^2.
Nilai posisi dan percepatan untuk t = 1 det, 2det, dan 4 detik ditunjukkan pada Tabel 1-4.

Untuk memperoleh gambaran visuil, hasil di atas dilukiskan pada Gb. 1-10.



GB. 1-10 HUBUNGAN ANTARA KETINGGIAN, KECEPATAN DAN PER-CEPATAN UNTUK BENDA YANG JATUH BEBAS

TABEL 1-4

t	y	v	a
0	0 m	0 m/det	9,8 m/det^2
1	-4,9 m	9,8 m/det	9,8 m/det^2
2	-19,6 m	-19,6 m/det	9,8 m/det^2
3	-44,1 m	-29,4 m/det	9,8 m/det^2
4	-78,4 m	-39,2 m/det	9,8 m/det^2

Contoh 1-2
Sebuah bola dilempar ke atas dengan kecepatan 19,6 m/det.

(a) Berapa lama waktu diperlukan untuk mencapai titik tertinggi yang dapat dicapai benda tersebut?
Pada titik tertinggi benda berhenti, sehingga kecepatan sama dengan nol.
Jadi $v = v_0 + at = +v_0 - gt = 0$

atau $t = v_0/g = 19{,}6/9{,}8 = 2$ detik

(b) Berapa tinggi bola terlempar ke atas?

$y = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = +v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$

$= 19{,}6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 2^2 = 19{,}6$ m

(c) Pada saat mana benda berada pada jarak 9,8 m di atas tanah?

$y = v_0 - \frac{1}{2} gt^2$

$+ 9{,}8 = 19{,}6\ t - 9{,}8\ t^2/2$

$t^2 - 4t + 2 = 0$

Akar dari persamaan kuadrat ini adalah:

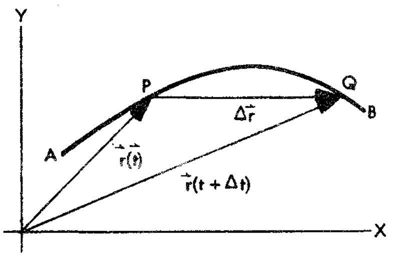
$t_1 = 0{,}6$ detik dan $t_2 = 3{,}4$ detik.

Pada saat $t_1 = 0{,}6$ detik benda berada pada ketinggian 9,8 m waktu naik, dan pada saat $t = 3{,}4$ detik berada pada ketinggian tersebut waktu sedang turun.

1.5 GERAK DALAM BIDANG DATAR

Perpindahan dan Kecepatan pada gerak lengkung

Kita pandang sebuah titik atau partikel yang bergerak dalam suatu bidang datar. Kita ikuti perubahan posisi partikel tersebut sebagai fungsi waktu. Untuk menentukan posisi partikel kita pergunakan sistem sumbu koordinat X - Y pada bidang datar. Titik asal sumbu koordinat dapat kita pasang pada sebarang tempat pada bidang datar tersebut, seperti terlihat pada Gb. 1-11.



GB. 1-11 SUATU PARTIKEL BERGERAK DENGAN LINTASAN GARIS LENGKUNG AB PADA BIDANG DATAR

Letak partikel pada bidang datar dinyatakan oleh *vektor posisi* $\vec{r}$, yaitu vektor yang ditarik dari titik asal sampai ke posisi partikel. Misalkan benda bergerak pada lintasan AB (Gb. 1-8), dan pada suatu saat t berada pada titik P. Vektor posisi pada saat t ditanyakan oleh vektor $\vec{r}(t)$. Beberapa saat kemudian, yaitu pada saat $t + \Delta t$, benda sudah berada pada titik Q, dimana vektor posisi benda dinyatakan oleh vektor $\vec{r}(t + \Delta t)$. Perpindahan yang terjadi antara t dan $t + \Delta t$ dapat dinyatakan dengan vektor yang ditarik dari P ke Q, yaitu vektor $\Delta\vec{r}$. Dapat dikatakan bahwa vektor $\vec{r}(t + \Delta t)$ adalah *jumlah vektor* $\vec{r}(t)$ dan vektor $\Delta\vec{r}$, atau $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$.

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

sehingga vektor perpindahan $\Delta\vec{r}$ tak lain adalah selisih vektor $\vec{r}(t + \Delta t)$ dan $\vec{r}(t)$.

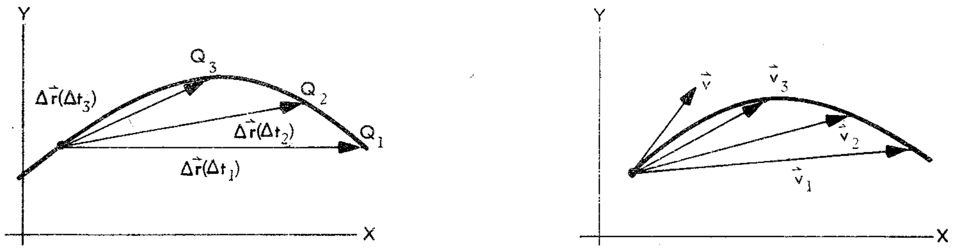
Untuk gerak dalam bidang datar dan gerak dalam ruang, kecepatan rata-rata didefinisikan dari:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}17)$$

Jika selang Δt kita perkecil terus, jadi kita buat $\Delta t \to 0$, maka kita akan memperoleh vektor *kecepatan sesaat*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Arah $\vec{v}$ adalah sama dengan arah garis singgung lintasan pada saat t; hal ini ditunjukkan pada Gb. 1-12.



GB. 1-12 DENGAN MEMBUAT INTERVAL Δt_1, Δt_2, Δt_3 YANG MAKIN KECIL VEKTOR PERPINDAHAN MENJADI MAKIN KECIL JUGA. PADA LIMIT $\Delta T \to 0$. MAKA KECEPATAN RATA-RATA $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ MENDEKATI KECEPATAN SESAAT $\vec{v}$

Hubungan antara vektor posisi dengan waktu $\vec{r}(t)$ disebut *persamaan gerak* partikel. Dari persamaan gerak ini kita peroleh kecepatan sesaat $\vec{v}$ dari hubungan $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Arah kecepatan sesaat dinyatakan oleh arah garis singgung lintasan pada posisi dimana partikel berada pada saat t. Adapun besar kecepatan pada suatu saat tidak dapat ditentukan dari lintasan partikel. Untuk menentukan ini harus dipergunakan persamaan gerak partikel, yang menyatakan posisi partikel pada setiap saat, yaitu $\vec{r}(t)$. Vektor kecepatan $\vec{v}$ ditentukan dari persamaan (1-18), $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ dengan menguraikan vektor-vektor $\vec{v}$ dan $\vec{r}$ atas komponen-komponen sepanjang sumbu X dan Y.

Jadi vektor $\vec{r}$ dapat ditulis sebagai:

$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y$ dan $\vec{v} = \hat{i}\,v_x + \hat{j}\,v_y$

dengan $\hat{i}$ adalah vektor satuan pada arah X, dan $\hat{j}$ adalah vektor satuan pada arah Y, sedang x adalah komponen $\vec{r}$ pada arah sumbu X, yaitu proyeksi vektor $\vec{r}$ pada arah sumbu - X; dan y adalah komponen $\vec{r}$ pada arah sumbu - Y.

Kedua vektor satuan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ membentuk suatu kumpulan yang *bebas linier;* maksudnya bila kita mempunyai hubungan

$$a\,\hat{i} + b\,\hat{j} = 0,$$

maka haruslah a = b = 0; atau vektor $\vec{0}$ mempunyai komponen x dan y sebesar nol. Jelas bahwa persamaan 1-18 dapat ditulis sebagai:

$$\hat{i}\,v_x + \hat{j}\,v_y = \hat{i}\,\frac{dx}{dt} + \hat{j}\,\frac{dy}{dt}$$

$$\text{atau } \hat{i}\left(v_x - \frac{dx}{dt}\right) + \hat{j}\left(v_y - \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

Karena $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ bebas linier, maka:

$$v_x - \frac{dx}{dt} = v_y - \frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\text{atau } v_x = \frac{dx}{dt} \text{ dan } v_y = \frac{dy}{dt}\,. \tag{1-19}$$

Jelas bahwa kita dapat memecahkan persamaan gerak untuk satu komponen vektor tanpa memperhatikan bagaimana komponen yang lain berubah dengan t; vektor kecepatan dapat diperoleh dari jumlah kedua vektor komponen. Harap dibedakan antara pengertian *vektor komponen* dan *komponen vektor*. Sesuai dengan hukum D-M dalam bahasa Indonesia, vektor komponen adalah vektor; misalnya $\hat{i}\,v_x$ adalah vektor komponen arah x.
Sedang komponen vektor adalah komponen, yaitu panjang proyeksi vektor pada arah sumbu X atau Y. Jadi komponen vektor $\vec{v}$ pada arah sumbu X adalah v_x, suatu besaran skalar.
Untuk gerak dalam ruang berdimensi tiga, persamaan (1-19) berlaku untuk komponen pada arah z, jadi dalam hal ini

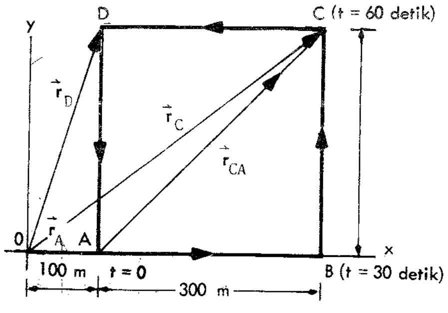
$$v_x = \frac{dx}{dt}\,,\ v_y = \frac{dy}{dt}\,,\ \text{dan } v_z = \frac{dz}{dt}$$

dan kecepatan $\vec{v}$ diperoleh dari jumlah vektor komponen pada arah x, y, dan z, yaitu:

$$\vec{v} = \hat{i}\,v_x + \hat{j}\,v_y + \hat{k}\,v_z$$

dengan $\hat{k}$ adalah vektor satuan arah sumbu Z.
Besar vektor kecepatan adalah $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.
Nilai ini adalah suatu skalar dan disebut *laju*. Laju adalah yang dibaca pada speedometer mobil.

Contoh 1-3
Misalkan sebuah mobil bergerak dengan laju tetap pada suatu lintasan seperti pada Gb. 1-13. Speedometer mobil menunjukkan laju 36 km/jam. Dalam persoalan ini laju mobil, seperti yang ditunjukkan oleh speedometer adalah tetap, selama bergerak ini speedometer tetap menunjuk nilai 36 km/jam. Akan tetapi kecepatan mobil mengalami perubahan di B, di C dan di D, karena ditempat-tempat tersebut *arah* kecepatan berubah.
Laju mobil adalah 36 km/jam = $\dfrac{36000 \text{ m}}{3600 \text{ detik}}$ = 10 m/det. Seluruh perjalanan



GB. 1-13 SEBUAH MOBIL BERGERAK DENGAN LAJU TETAP DARI A MELALUI LINTASAN ABCD

dilakukan dalam waktu

$4 \times \frac{300}{10}$ detik = 120 detik.

Sekarang marilah kita tentukan kecepatan rata-rata (vektor) dalam selang waktu antara t = 0 dan t = 30 detik.
Dari persamaan 1 - 14 kita peroleh

$$\bar{\vec{v}}\ (t = 0 \text{ s/d } t = 10 \text{ det}) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{30}$$

$$= \frac{\hat{i}(OB) - \hat{i}(OA)}{30} = \hat{i}\ \frac{300 \text{ m}}{30 \text{ det}} = \hat{i}\ 10 \text{ m/det}$$

yaitu sama dengan kecepatan sesaat dalam selang waktu ini.
Bagaimana halnya dengan kecepatan rata-rata dalam selang waktu antara t = 0 s/d t = 60 detik? Pada t = 60 detik mobil berada di C, yaitu pada posisi $\vec{r}_C$.

$$\bar{\vec{v}}(t = 0 \text{ s/d } t = 20 \text{ det}) = \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_A}{t_C - t_A}$$ Akan tetapi $\hat{r}_C = \hat{i}\ 400 + \hat{j}\ 300$

dan $\hat{r}_C = \hat{i}\ 100$ sehingga $\vec{r}_C - \vec{r}_A = \hat{i}\ 300 + \hat{j}\ 300$

dan $\bar{\vec{v}}_{AC} = \frac{\hat{i}\ 300 + \hat{j}\ 300}{60}$ m/det $= \hat{i}\ 5 + \hat{j}\ 5$ m/det

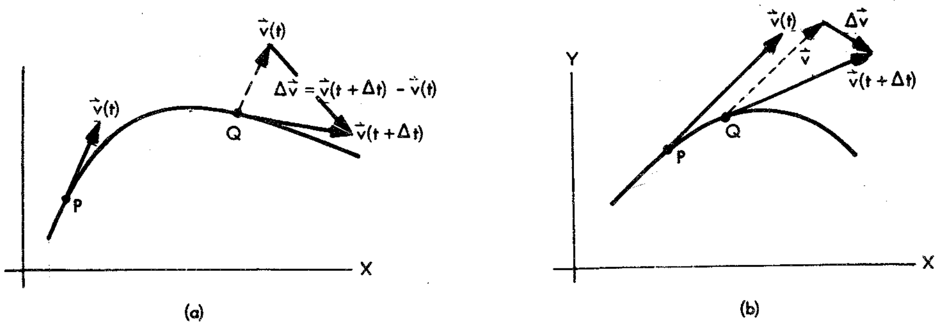
Besar $\bar{V}_{AC} = \sqrt{50 \text{ m/det}}$ sedang arahnya membuat sudut 45° dengan sumbu-X.
Sekarang berapa besar kecepatan rata-rata dalam seluruh perjalanan.
Di sini $r(t = 0) = r_A$ dan $r\ (t = 120 \text{ det}) = r_A$ jadi $\Delta r = r_A - r_A = 0$ dan t = 120 detik. Jadi $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 0$.
Dalam gerak ini *laju* benda, yaitu *besar kecepatan sesaat*, adalah tetap, yaitu 10 m/detik atau 36 km/jam.

Gerak dalam bidang datar dengan percepatan tetap

Jika suatu partikel bergerak pada suatu garis lurus, vektor kecepatannya boleh mempunyai nilai sebarang, akan tetapi arahnya terbatas sepanjang garis lurus tersebut. Jika suatu partikel bergerak pada suatu garis lengkung dalam suatu bidang datar, maka arah dan besar vektor kecepatan boleh mempunyai nilai sebarang. Arah vektor kecepatan adalah arah garis singgung lintasan pada titik dimana benda berada pada suatu saat.
Vektor percepatan dapat diperoleh dari jumlah vektor komponen percepatan pada dua arah yang kita pilih sebagai sumbu koordinat X-Y.
Kita pandang suatu partikel yang sedang bergerak sepanjang garis lengkung PQ(Gb. 1-14). Percepatan rata-rata $\bar{a}$ adalah

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad (1\text{-}20)$$

dimana $\Delta\vec{v} = \vec{v}\ (t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ adalah perubahan vektor kecepatan yang terjadi dalam selang waktu Δt. Vektor $\Delta\vec{v}$ menyatakan perubahan arah dan besar vektor kecepatan, seperti ditunjukkan pada Gb. 1-14.



GB. 1-14 ARAH VEKTOR PERCEPATAN $\vec{a}(t)$ ADALAH SEJAJAR $\Delta\vec{v}$ BILA $\Delta t \to 0$

Jelas bahwa arah percepatan rata-rata $\bar{a}$ adalah sejajar dengan arah vektor Δv, sedang besarnya adalah sama dengan panjang vektor

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, yaitu $\left|\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right|$.

Jika selang waktu Δt kita buat sangat kecil, jadi kita buat $\Delta t \to 0$, maka vektor perubahan kecepatan, yaitu Δv , juga menjadi sangat kecil, akan tetapi $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ akan mendekati suatu nilai limit; nilai limit ini tidak lain adalah *vektor* percepatan sesaat $\vec{a}$. Jadi

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1-21}$$

Arah vektor percepatan sesaat $\vec{a}$ pada umumnya tidaklah sama dengan arah $\vec{v}$. Besar dan arah vektor percepatan $\vec{a}$ ditentukan dari hasil jumlah vektor komponen pada sumbu X-Y, yaitu dari

$$\vec{a} = \hat{i}\, a_x + \hat{j}\, a_y \tag{1-22}$$

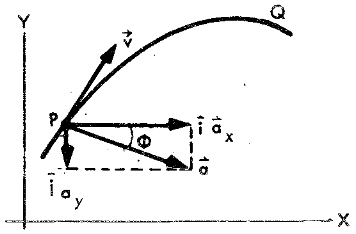
Sedang besar a_x dan a_y dapat diperoleh dari hubungan:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \tag{1-23}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Arah vektor $\vec{a}$ ditentukan dari

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{a_y}{a_x} \tag{1-24}$$



GB. 1-15 VEKTOR PERCEPATAN $\vec{a}$ DIURAIKAN ATAS VEKTOR-VEKTOR KOMPONEN PADA ARAH X DAN Y

sedang besar vektor $\vec{a}$ adalah

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Hal ini ditunjukkan pada Gb. 1-15. Untuk memperjelas pengertian yang baru dibahas, marilah kita pandang gerak dalam bidang datar dengan percepatan tetap. Jika $\vec{a}$ tetap, maka komponen-komponen a_x dan a_y juga tetap,

artinya a_x dan a_y tidak berubah dengan waktu. Di sini kita dapat memandang gerak pada garis lengkung sebagai perpaduan dua gerak lurus sepanjang sumbu X dan Y. Gerak lurus pada arah sumbu X mempunyai kecepatan v_x dengan percepatan tetap a_x, dan gerak lurus pada arah sumbu-Y mempunyai kecepatan v_y dan percepatan tetap a_y.
Dari persamaan (1-11) kita peroleh:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (1\text{-}26a)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

Kedua persamaan skalar di atas dapat kita satukan dalam persamaan vektor:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \qquad (1\text{-}26)$$

Begitu pula

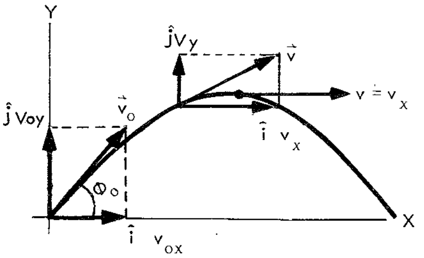
$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \qquad (1\text{-}27a)$$

$$y = v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \qquad (1\text{-}27b)$$

atau $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2} \vec{a}\, t^2$

Satu contoh gerak lengkung dengan percepatan tetap adalah gerak proyektil atau gerak peluru. Ini adalah gerak dalam dua dimensi dari peluru yang dilempar miring ke atas. Kita anggap bahwa gerak ini terjadi dalam ruang hampa sehingga pengaruh udara pada gerakan peluru dapat diabaikan.

Gerak peluru
Gerak sebuah peluru dipengaruhi oleh suatu percepatan gravitasi $\vec{g}$ dengan arah vertikal ke bawah. Pada arah horizontal percepatan sama dengan nol.
Kita pilih titik asal sistem koordinat pada titik dimana peluru mulai terbang (Gb. 1-16). Kita mulai menghitung waktu pada saat peluru mulai terbang; jadi kita ambil pada waktu t = 0 peluru berada pada (0,0). Misalkan kecepatan awal peluru adalah v_0, dan membuat sudut Θ_0 dengan sumbu +X. Komponen vektor kecepatan awal pada arah sumbu X, yaitu v_{0x}, adalah sama dengan $v_0 \cos \Theta_0$, dan sepanjang sumbu Y, yaitu $v_{0y} = v_0 \sin \Theta_0$. Karena tidak ada percepatan pada arah horizontal, maka v_x adalah konstan. Jadi dapat kita tuliskan $a_x = 0$, dan dari persamaan 1-26a kita peroleh:



GB. 1-16. SEBUAH PARTIKEL YANG MELAKUKAN GERAK PELURU

$$v_x = v_0 \cos \Theta_0 \qquad (1\text{-}28)$$

Komponen y dari vektor kecepatan, v_y, akan berubah dengan waktu sesuai dengan gerak lurus vertikal dengan percepatan tetap. Dalam persamaan 1-26, kita masukkan $a_y = -g$ dan $v_{0y} = v_0 \sin \Theta_0$ maka $v_y = v_0 \sin \Theta_0 - gt$

Besar kecepatan resultan pada setiap saat diberikan oleh

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Sedang sudut Θ yang dibuat oleh $\vec{v}$ dengan sumbu X diberikan oleh

$$\text{tg } \Theta = v_y/v_x$$

Arah vektor kecepatan adalah menyinggung lintasan partikel pada setiap titik;
sedang *percepatan* mempunyai arah vertikal ke bawah pada setiap titik.

Absis dari partikel pada setiap saat adalah

$$x = (v_0 \cos \Theta_0)t, \qquad (1\text{-}30)$$

sedang ordinatnya adalah

$$y = (v_0 \sin \Theta_0)t - \tfrac{1}{2} gt^2 \qquad (1\text{-}31)$$

Dengan eliminasi waktu dari kedua persamaan di atas, kita peroleh persamaan lintasan

$$y = (\text{tg } \Theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \Theta_0)^2} x^2$$

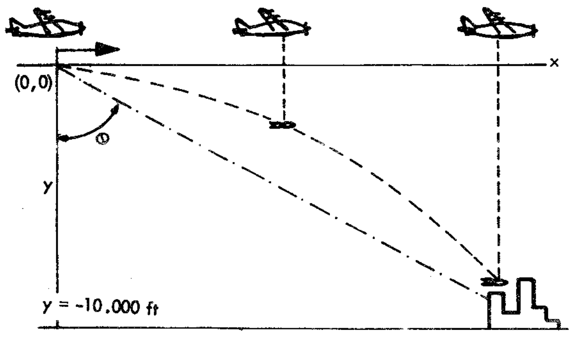
Karena Θ_0, v_0, dan g masing-masing adalah tetapan, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$y = bx - cx^2.$$

Jadi lintasan y(x) dari gerak peluru adalah suatu parabola.

Contoh 1-4

Sebuah bomber terbang horizontal dengan kecepatan tetap sebesar 240 mil/jam pada ketinggian 10.000 ft menuju pada suatu titik tepat di atas sasaran. Berapa sudut penglihatan ϕ agar bom yang dilepaskan mengenai sasaran (Gb. 1-17), sedang percepatan gravitasi g = 32 ft/det².



GB. 1-17 SEBUAH BOM DILEPASKAN DARI SUATU KAPAL TERBANG YANG BERGERAK HORIZONTAL DENGAN KECEPATAN V_0. SUDUT Φ ADALAH YANG DIBUAT OLEH PENGARAH BOM AGAR BOM MENGENAI SASARAN

Gerak bom pada waktu dilepaskan adalah sama dengan gerak pesawat terbang. Jadi kecepatan awal bom adalah 240 mil/jam, arah horizontal.

Jadi v_{0x} = 240 mil/jam = 352 ft/det dan $v_{0y} = 0$

Waktu yang diperlukan oleh bom untuk sampai di tanah dapat dihitung dari gerak vertikal.

$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$ dengan

y = -10.000 ft, dan $v_{0y} = 0$,

sehingga:

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(-10.000)}{32}} = 25 \text{ detik}$$

Gerak horizontal yang ditempuh bom adalah:

$$x = v_{0x}t = (352 \text{ ft/det})(25 \text{ det}) = 8800 \text{ ft}$$

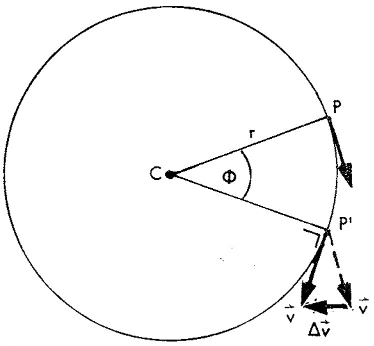
sehingga sudut ϕ haruslah:

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{8800}{10.000}\right) = 41,6^{\circ}$$

Apakah gerak bom tampak seperti parabola bila dilihat dari pesawat terbang?

1.6 GERAK LINGKAR

Suatu partikel yang bergerak pada suatu lingkaran dengan laju tetap mempunyai percepatan. Meskipun laju, yaitu besar vektor kecepatan sesaat, adalah tetap, akan tetapi vektor kecepatan berubah arah terus menerus, sehingga gerak lingkar beraturan, yaitu dengan laju tetap, adalah suatu gerak dipercepat. Jika laju gerak partikel adalah v, kita ingin menentukan berapa percepatan a untuk gerak lingkar beraturan ini. Perhatikan Gb. 1-18.



GB. 1-18 GERAK LINGKAR BERATURAN. PERUBAHAN VEKTOR KECEPATAN ANTARA P DAN P' DIBERIKAN OLEH $\Delta\vec{v}$

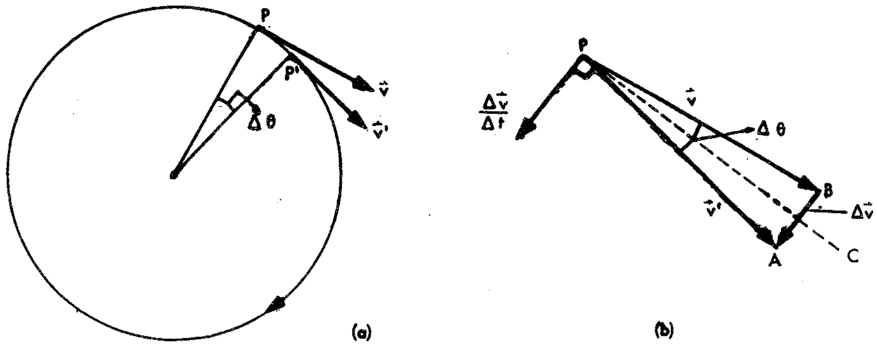
Sebuah partikel melakukan gerak lingkar. Pada saat t partikel berada pada titik P dan vektor kecepatan dinyatakan oleh $\vec{v}$. Beberapa saat kemudian, pada saat $t + \Delta t$, partikel sudah berada pada titik P', dimana vektor kecepatan dinyatakan oleh $\vec{v}'$. Perhatikan arah vektor kecepatan pada setiap saat adalah sepanjang garis singgung lingkaran pada arah gerak partikel. Karena laju adalah tetap (gerak lingkar beraturan), maka panjang anak panah yang menyatakan vektor kecepatan juga tidak berubah.

Perubahan vektor kecepatan dinyatakan oleh $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$, sehingga percepatan rata-rata dalam selang waktu Δt diberikan oleh

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dan arah percepatan rata-rata adalah sama dengan arah $\Delta\vec{v}$, karena pembaginya, yaitu Δt, adalah suatu skalar.

Untuk menghitung percepatan sesaat, selang waktu Δt kita buat sangat kecil, yaitu $\Delta t \to 0$; artinya titik P' pada Gb. 1-18 kita buat mendekati titik P (Gb. 1-19a). Pada Gb. 1-19b ditunjukkan apa yang terjadi jika P' dibuat mendekati P, artinya Δt diperkecil. Tampak bahwa $\Delta\vec{v}$ juga menjadi kecil, akan tetapi $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ tetap besar, dan arahnya adalah sama dengan arah $\Delta\vec{v}$.



GB. 1-19 JIKA $\Delta\theta$ KECIL MAKA $\Delta\vec{v}$ KECIL, AKAN $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ TIDAK PERLU KECIL, SEBAB Δt KECIL

Besar vektor $\Delta\vec{v}$, yaitu $|\Delta\vec{v}|$, dapat dihitung dari segitiga PAB,

$$|\Delta\vec{v}| = 2v \sin \frac{\Delta\Theta}{2} \qquad (1\text{-}32)$$

Jika Δt dibuat kecil sekali, maka sudut $\Delta\theta$ juga menjadi sangat kecil, sehingga kita dapat mempergunakan hubungan

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$$

dan persamaan (1-32) dapat ditulis sebagai:

$$|\Delta\vec{v}| = 2v \frac{\Delta\Theta}{2} = v\Delta\Theta \qquad (1\text{-}33)$$

Di sini sudut $\Delta\Theta$ adalah dalam satuan *radial.*
Busur PP' mempunyai panjang ΔS, dengan
$\Delta S = r\Delta\Theta$

$$\text{atau } \Delta\Theta = \frac{\Delta S}{r}. \qquad (1\text{-}34)$$

Untuk Δt yang *sangat kecil* kita selalu dapat tuliskan
$\Delta S = v\,\Delta t$. (1-35)
Dari persamaan-persamaan (1-33), (1-34), dan (1-35) kita peroleh untuk $\Delta t \to 0$

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v\Delta S}{r} = \frac{v(v\Delta t)}{r} = \frac{v^2}{r}\Delta t \qquad (1\text{-}36)$$

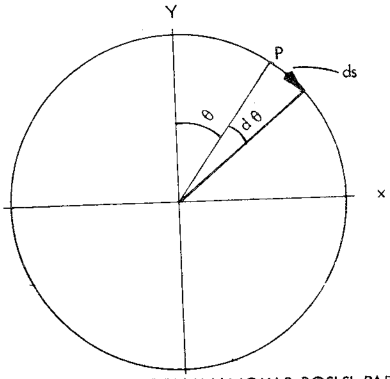
Akibatnya besar percepatan sesaat $\vec{a}$, yang kita tuliskan sebagai a, diberikan oleh:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v^2}{r}\frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Arah vektor percepatan sesaat diberikan oleh arah $\Delta\vec{v}$. Jika Δt dibuat sangat kecil maka arah $\Delta\vec{v}$ akan tegaklurus arah garis singgung lingkaran pada titik P. Jadi arah percepatan adalah *menuju pusat* atau arah *sentripetal,* sehingga percepatan pada gerak lingkar beraturan disebut *percepatan sentripetal.*
Jadi kesimpulan kita adalah untuk gerak lingkar beraturan dengan laju v, vektor percepatan sesaat diberikan oleh:

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{a}_r \qquad (1\text{-}37)$$

dengan $\hat{a}_r$ adalah vektor satuan pada arah radial *keluar* atau menjauhi pusat. Tanda negatif pada persamaan (1-37) menunjukkan bahwa percepatan sentripetal $\vec{a}_c$ mempunyai arah menuju pusat lingkaran.
Dalam gerak lingkar jarak partikel pada suatu saat terhadap pusat lingkaran adalah tetap dan sama dengan jejari lingkaran. Akibatnya posisi benda terhadap titik pusat lingkaran cukup dinyatakan oleh sudut Θ, seperti ditunjukkan pada Gb. 1-20. Panjang busur dS dapat dinyatakan sebagai dS = rdΘ sehingga



GB. 1-20 PADA GERAK LINGKAR POSISI PARTIKEL DAPAT DINYATAKAN DENGAN SUDUT θ

$$v = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\Theta}{dt} \qquad (1\text{-}38)$$

Pada persamaan 1-38, $\frac{d\Theta}{dt}$ adalah *kecepatan sudut*, yang dinyatakan oleh ω. Satuan dari kecepatan sudut adalah radial/detik. Jadi persamaan (1-38) dapat dituliskan sebagai:

$$v = r\omega \qquad (1\text{-}39)$$

Waktu yang diperlukan dalam gerak lingkar beraturan untuk menempuh satu putaran disebut *perioda* putaran, dan dinyatakan dengan T.
Besaran lain yang sering dipergunakan dalam gerak lingkar beraturan adalah berapa kali partikel mengelilingi lingkaran dalam satuan waktu, atau berapa revolusi yang dilakukan partikel per satuan waktu.
Besaran ini disebut *frekuensi*, dan dinyatakan dengan f. Satuan frekuensi adalah cycle/second atau *cps;* satuan cps sering juga disebut Herzt (H_z).
Seringkali frekuensi dinyatakan dalam *rpm*, yaitu revolution/minute atau putaran/menit.
Jelas bahwa frekuensi f dapat diperoleh dari perioda putaran T, yaitu dari $f = \frac{1}{T}$. Jika misalnya ada 5 putaran dalam satu detik, maka waktu untuk satu putaran adalah 1/5 detik. Jadi T = 1/5 = 1/f.
Hubungan lain adalah antara ω dan T. Dalam waktu satu perioda, partikel melakukan satu putaran berarti menempuh sudut 360° = 2π rad.
Karena kecepatan sudut ω adalah tetap, maka ω = 2π/T atau ω = 2πf.
Akhirnya kita dapat menyatakan percepatan sentripetal $\vec{a}_c$ sebagai

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{a}_r = -\omega^2 r\,\hat{a}_r \qquad (1\text{-}40)$$

Contoh 1-5
Bulan berputar mengelilingi bumi, membuat satu putaran dalam 27,3 hari.
Jika lintasan orbit dapat dianggap lingkaran, dan mempunyai jejari 239,000 mil, berapakah percepatan bulan yang menuju bumi?
Jejari r = 239.000 mil = 385 × 10^6 meter, waktu untuk satu putaran adalah satu perioda T = 27.3 hari = 23.6 × 10^5 detik.
Laju bulan (dianggap tetap) adalah:

$$v = \frac{2\pi}{T} r = 1020 \text{ m/detik}$$

Percepatan sentripetal adalah

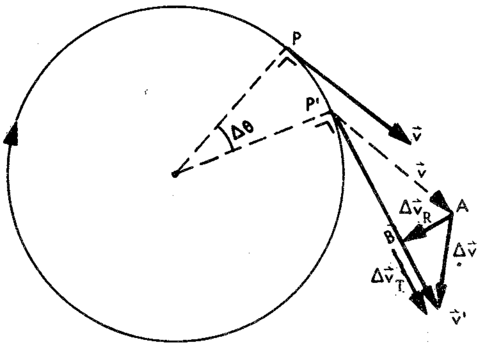
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1020 \text{ m/det})^2}{385 \times 10^6 \text{ m}} = 0{,}00273 \text{ m/det}^2$$

atau hanya sebesar $2.8 \times 10^{-4}g$, dengan g adalah percepatan gravitasi, yaitu percepatan benda jatuh dekat permukaan bumi.

Contoh 1-6
Kita diminta untuk menghitung laju satelit bumi buatan, dengan anggapan bahwa satelit ini bergerak tepat di atas permukaan bumi, sedang jejari bumi R_e = 6400 km.
Seperti halnya setiap benda yang ada dekat permukaan bumi, satelit ini mempunyai percepatan g ke arah pusat bumi. Percepatan ini yang membuat satelit bergerak lingkar sekitar bumi. Jadi percepatan sentripetal adalah g, dan dari $a = v^2/r$ kita peroleh

$$g = \frac{v^2}{R_e} \quad \text{atau } v = \sqrt{R_e g} = \sqrt{\{(6{,}4 \times 10^6 \text{ m})(10 \text{ m/det}^2)\}} = 8000 \text{ m/detik}$$

Percepatan tangensial dalam gerak lingkar
Sekarang kita pandang hal yang lebih umum, yaitu gerak lingkar dengan laju yang tidak tetap. Gerak ini dilukiskan pada Gb. 1-21.



GB. 1-21 SEBUAH PARTIKEL BERGERAK LINGKAR DIPERCEPAT

Misalkan partikel berada pada titik P pada saat t, dan berada di titik P' pada saat $t' = t + \Delta t$. Dalam waktu Δt, vektor kecepatan berubah sebesar: $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$
Pada gambar ditunjukkan bahwa jika Δt dibuat sangat kecil, sehingga sudut $\Delta\Theta$ menjadi sangat kecil pula, perubahan kecepatan Δv dapat dipecahkan menjadi

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_T + \Delta\vec{v}_R \qquad (1\text{-}41)$$

Vektor komponen $\Delta\vec{v}_R$ kita buat dengan P'A = P'B, sehingga $\Delta\vec{v}_R$ menyatakan perubahan vektor kecepatan pada laju tetap. Jadi $\Delta\vec{v}_R$ adalah percepatan karena *perubahan arah* vektor kecepatan.
Jika Δt kita buat mendekati nol, maka $\Delta\vec{v}_R$ juga akan mendekati nol, akan

tetapi $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_R}{\Delta t}$ adalah sama dengan percepatan radial, yang tidak lain

adalah *percepatan sentripetal* $\vec{a}_c$.
Jadi

$$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_R}{\Delta t} = -\hat{a}_r \frac{\vec{v}^2}{r} \qquad (1\text{-}42)$$

menuju pusat, atau arah sentripetal
Jika $\Delta t = 0$, yaitu bila p' mendekati P, vektor komponen $\Delta\vec{v}_T$ akan mempunyai *arah tangensial* atau arah singgung. Akibatnya percepatan singgung diberikan oleh

$$\vec{a}_T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_T}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_T}{dt}$$

Karena $\vec{v}_T$ mempunyai arah garis singgung lingkaran, maka

$$\frac{d\vec{v}_T}{dt} = \hat{a}_T \frac{dv}{dt}$$

dengan $\hat{a}_T$ adalah vektor satuan pada arah singgung, atau arah tangensial. Perhatikan bahwa besar percepatan tangensial adalah

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad (1\text{-}43)$$

Dari persamaan 1-39 kita dapatkan

$$a_T = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} \qquad (1\text{-}44)$$

Pada persamaan (1-44) $\frac{d\omega}{dt}$ menyatakan perubahan kecepatan sudut per satuan waktu, jadi $\frac{d\omega}{dt}$ tidak lain adalah *percepatan sudut*, dan dinyatakan dengan α.
Persamaan (1-44) dapat kita tulis sebagai

$$a_T = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (1\text{-}45)$$

Percepatan resultan adalah

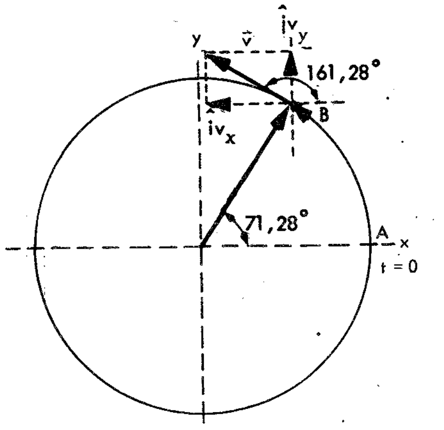
$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_T \qquad (1\text{-}46)$$

dan besar percepatan resultan diberikan oleh

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \qquad (1\text{-}47)$$

Jika gerak bukanlah gerak lingkar, pembahasan di atas tetap berlaku jika untuk jejari lingkar r kita pergunakan jejari lengkungan pada tempat dimana partikel berada pada suatu saat. Kemudian a_T memberikan komponen percepatan pada arah garis singgung lengkungan pada tempat dimana partikel berada, sedang a_R adalah komponen percepatan tegak-lurus lengkungan pada titik tersebut.

Contoh 1-7
Sebuah partikel bergerak pada suatu lingkaran dengan jejari 50 cm seperti pada Gb. 1-22. Diketahui bahwa kecepatan sudut berubah dengan waktu sebagai $\omega(t) = 5t^3$ rad/detik (a) Jika pada $t = 0$ benda ada di A, kita hitung letak titik pada $t = 2$ detik.
Karena kecepatan sudut ω tidak tetap, kita gunakan hubungan



Gb. 1-22 JEJAK PARTIKEL UNTUK CONTOH 1-7

$$\Theta = \int_0^2 \omega(t)\,dt = \int_0^2 (5t^3)\,dt$$

$$= \frac{5}{4} t^4 \Big/_0^2 = \frac{5}{4} \times (2^4)$$

$$= \frac{5}{4} \times 16 = 20 \text{ rad.}$$

Karena 2π rad = 360° maka

$$\Theta\ (t = 2) = \frac{20}{2\pi} \times 360° = 3,198 \times 360°$$

$$= (3 + 0,198)360°$$

$$= 6(360°) + 71,28°$$

Jadi pada t = 2 detik partikel sudah mengelilingi lingkaran sebanyak tiga kali dan berada di B.

(b) Selanjutnya marilah kita hitung vektor kecepatan partikel pada t = 2 detik.

Laju partikel, yaitu besar vektor kecepatan sesaat adalah

$$v = \omega R$$

Pada saat t = 2 detik

$$\omega = 5 \times (2)^3 = 40 \text{ rad/detik}$$

sehingga laju

$$v = \omega R = (40 \text{ rad/det})(0,50 \text{ m}) = 20 \text{ m/det}$$

Arah vektor kecepatan $\vec{v}$ adalah menyinggung lingkaran pada titik B, membuat sudut +161,28° dengan sumbu x. Jadi vektor kecepatan $\vec{v}$ (t = 2) dapat kita tulis sebagai

$$\vec{v}\ (t = 2) = 20 \text{ m/det } \angle{+161,28°}$$

(c) Sekarang marilah kita tentukan vektor percepatan A pada saat t = 2 detik.

Percepatan sudut α dapat dihitung dari

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^3) = 15t^2.$$

Pada saat t = 2 detik percepatan sudut ini adalah

$$\alpha\ (t = 2) = 15\ (2)^2 = 60 \text{ rad/det}^2$$

Vektor percepatan mempunyai dua vektor komponen yaitu vektor percepatan tangensial a_T dan vektor percepatan radial a_R.

Vektor percepatan tangensial dapat dihitung dari

$$\vec{a}_t = \hat{\Theta}\,\alpha\,R$$

dengan $\hat{\Theta}$ adalah vektor satuan arah tangensial. Vektor percepatan radial tidak lain adalah percepatan sentripetal

$$\vec{a}_R = -\hat{r}\,\frac{v^2}{R} = -\hat{r}\,\omega^2 R$$

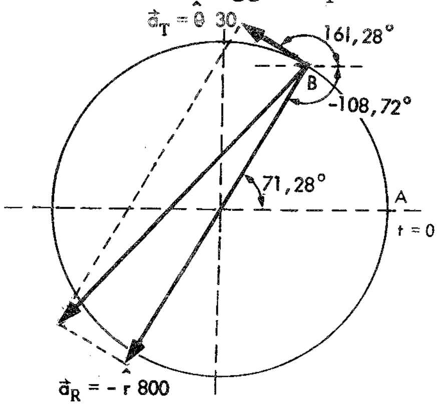
dengan $\hat{r}$ adalah vektor satuan arah radial keluar.
Untuk t = 2 detik percepatan sudut

α = 60 rad/detik^2 sedang $\omega = 5(2)^3$ = 40 rad/detik

Sekarang dapat kita hitung

$\vec{a}_T = \hat{\theta}\,\alpha\,R = \hat{\theta}\,(60 \text{ rad/det}^2)(0{,}5 \text{ m}) = \hat{\theta}\ 30 \text{ m/det}^2$

dengan $\hat{\theta}$ adalah vektor satuan menyinggung lingkaran pada titik B (Gb. 1-23), sehingga dapat kita tuliskan



GB. 1-23 VEKTOR PERCEPATAN PADA CONTOH 1-7

$\vec{a}_T$ - 30 m/det $\angle +161{,}28°$

Vektor komponen percepatan radial pada t = 2 detik adalah

$\vec{a}_R = -\hat{r}\,\omega^2 R = -\hat{r}\,(40 \text{ rad/det})^2(0{,}50 \text{ m})$

$= -\hat{r}\ (800) \text{ m/detik}^2$

dengan $\hat{r}$ adalah vektor satuan arah radial pada titik B.
Jadi dapat dituliskan

$\vec{a}_R = 800\ \angle -108{,}72° \text{ m/det}^2$.

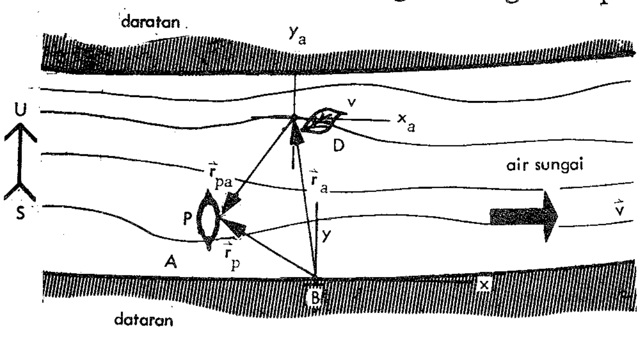
Akhirnya vektor percepatan pada t = 2 detik dapat ditulis sebagai

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$

$= (30\ \angle +161{,}28° + 800\ \angle -108{,}72°)$ m/detik

1.7 KECEPATAN DAN PERCEPATAN RELATIF

Marilah kita pandang sebuah perahu di atas air sungai yang mengalir. Agar lebih jelas, perhatikan Gb. 1-24. Misalkan sebuah perahu P bertolak dari titik A yang terletak pada tepi selatan sungai. Seorang berdiri di B mengamati gerak perahu. Karena perahu terletak di atas permukaan air sungai, perahu melakukan dua gerak serentak, yaitu bergerak ter bawa air sungai, dan gerak karena dikayuh.



GB. 1-24 SEBUAH PERAHU BERGERAK DI ATAS PERMUKAAN AIR SUNGAI YANG MENGALIR

Untuk membahas persoalan ini perlu mengambil dua *titik referensi* atau *titik acuan*. Satu titik acuan diam di tanah, misalnya titik B, dan satu titik acuan bergerak dengan permukaan sungai, misalnya sehelai daun yang terapung dan bergerak bersama air sungai dengan kecepatan $\vec{v}_a$.
Letak perahu dapat dinyatakan terhadap kedua titik acuan tadi.
Jika pada B kita buat sumbu koordinat X-Y, maka perahu dinyatakan oleh

vektor posisi $\vec{r}_p$;

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt}, \qquad \text{dan} \qquad \vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2}$$

Titik acuan yang kedua kita pasang pada daun D yang bergerak dengan permukaan air, dan kita dapat tempatkan sistem koordinat lain, yang kita sebut X_a-Y_a, pada daun tersebut. Letak perahu dalam sistem koordinat ini dinyatakan oleh $\vec{r}_{pa}$.
Kemudian kita memberi hubungan antara kedua sistem koordinat ini dengan menyatakan letak daun terhadap titik B dengan vektor posisi $\vec{r}_a$.
Dari gambar tampak bahwa

$$\vec{r}_p = \vec{r}_a + \vec{r}_{pa} \tag{1-48}$$

Dari persamaan (1-48) kita peroleh:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{d\vec{r}_a}{dt} + \frac{d\vec{r}_{pa}}{dt} \quad \text{atau} \quad \vec{v}_p = \vec{v}_a + \vec{v}_{pa} \tag{1-49}$$

Pada persamaan (1-49), $\vec{v}_p$ menyatakan gerak perahu terhadap tanah, jadi menyatakan gerak perahu terhadap sistem koordinat atau *kerangka acuan* (Inggris: *frame of reference*) yang diam terhadap tanah. Sedang $\vec{v}_{ap}$ menyatakan kecepatan perahu terhadap sistem koordinat pada daun, yaitu suatu *kerangka acuan* yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_a$ terhadap tanah.
Kecepatan $\vec{v}_{pa}$, yaitu kecepatan gerak perahu terhadap air, disebut *kecepatan relatif* perahu terhadap air. Jadi

$$\vec{v}_{pa} = \vec{v}_p - \vec{v}_a$$

Persamaan (1-49) menyatakan bahwa *kecepatan perahu terhadap tanah adalah jumlah vektor dari kecepatan relatif perahu terhadap air* dan *kecepatan gerak air terhadap tanah.*
Dari persamaan (1-49) kita dapat diperoleh

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} + \frac{d\vec{v}_{pa}}{dt} \quad \text{atau} \quad \vec{a}_p = \vec{a}_a + \vec{a}_{pa}$$

sehingga *percepatan relatif* perahu terhadap air, yaitu $\vec{a}_{ap}$, dapat ditulis sebagai

$$\vec{a}_{pa} = \vec{a}_p - \vec{a}_a \tag{1-50}$$

Persamaan (1-50) menyatakan bahwa percepatan relatif perahu terhadap air adalah selisih vektor percepatan perahu terhadap tanah dan vektor percepatan air terhadap tanah.

Contoh 1-8

Kompas pada suatu pesawat terbang menunjukkan bahwa pesawat terbang menuju arah timur. Informasi dari bawah menyatakan bahwa angin bertiup ke arah utara. Tunjukkan dengan diagram, kecepatan pesawat terbang terhadap tanah.

Pada persoalan ini pesawat terbang adalah obyek yang bergerak. Tanah merupakan kerangka acuan yang diam, dan udara adalah kerangka acuan yang bergerak. Jika

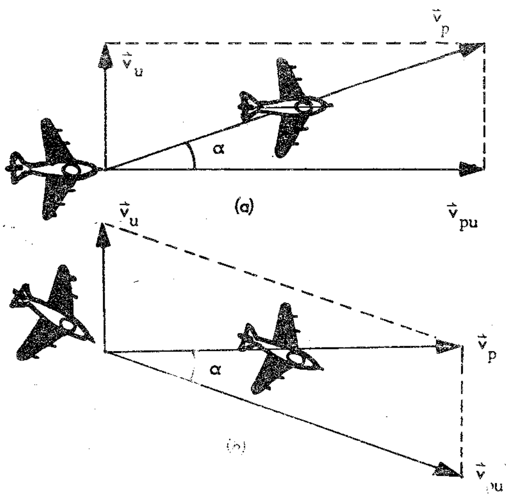
$\vec{r}_p$ menyatakan posisi pesawat terbang terhadap kerangka acuan diam (tanah)

$\vec{r}_{pu}$ menyatakan posisi pesawat terbang terhadap kerangka acuan yang bergerak (udara)

dan $\vec{r}_u$ posisi kerangka acuan udara terhadap tanah, maka kita peroleh hubungan

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{pu} + \vec{r}_u \qquad \text{atau} \qquad \vec{v}_p = \vec{v}_{pu} + \vec{v}_u$$

Pada persamaan di atas arah $\vec{v}_{pu}$ dinyatakan oleh kompas, jadi arah timur dan besarnya dapat dilihat pada alat penunjuk kecepatan pesawat terbang. Misalkan alat ini menunjukkan kecepatan 200 mil/jam, dan dari bawah diberitahu bahwa kecepatan angin (terhadap tanah, tentunya) adalah 40 mil/jam; maka v_u mempunyai arah ke utara dan besarnya adalah 40 mil/jam. Kita dapat lukiskan diagram vektor seperti pada **Gb. 1-25a.**



GB. 1-25 DIAGRAM VEKTOR KECEPATAN KAPAL TERBANG

Arah yang ditempuh oleh pesawat terbang jika dilihat dari tanah membuat sudut α arah timur laut. Sudut ini diperoleh dari

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_u}{v_{pu}} = \frac{40}{200} = 1/5, \text{ atau}$$

$$\alpha = 11^\circ 20'$$

Besar kecepatan pesawat terbang terhadap tanah adalah:

$$v_p = \sqrt{v_u^2 + v_{pu}^2} = \sqrt{(200)^2 + (40)^2} \text{ mil/jam}$$

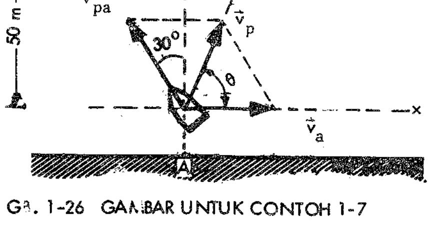
$$= 204 \text{ mil/jam}$$

Sekarang tunjukkan dengan diagram vektor pada arah mana hidung pesawat harus ditunjukkan agar pesawat tepat bergerak ke timur terhadap bumi. Jawabnya ditunjukkan pada Gb. 1-25b.

Contoh 1-9

Seorang mencoba mengarungi sungai dengan sebuah perahu. Misalkan sungai mengalir ke arah timur dengan laju 10 km/jam. Perahu bergerak di atas air ke arah barat laut membuat sudut 30° dengan arah utara.

Laju perahu dibaca pada speedometer adalah 15 km/jam. Jika jarak tepian sungai dari tempat awal adalah 50 m, tentukan dimana tempat perahu akan sampai di tepian seberang. Agar lebih jelas kita lukiskan persoalan ini pada Gb. 1-26.



GB. 1-26 GAMBAR UNTUK CONTOH 1-7

Dari pernyataan soal dapat disimpulkan bahwa vektor kecepatan relatif perahu terhadap air $\vec{v}_{pa}$ = 15 km/jam, membuat sudut 120° dengan sumbu x, terhadap suatu sistem koordinat yang terpancang di tanah.

Kita tulis

$$\vec{v}_{pa} = 15 \angle 120^\circ \text{ km/jam}$$

$$= \hat{i}(15) \cos 120^\circ + \hat{j}(15) \sin 120^\circ$$

$$= (-\hat{i}\ 7,5 + \hat{j}\ 13) \text{ km/jam}$$

Vektor kecepatan air terhadap tanah

$\vec{v}_a = \hat{i}$ 10 km/jam.

Karena perahu melakukan dua gerak serentak, yaitu gerak relatif terhadap air dan arah terbawa air, maka vektor kecepatan perahu terhadap tanah adalah

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{pa} + \vec{v}_a$$

$$= (-\hat{i}\ 7,5 + \hat{j}\ 13) + \hat{i}\ 10$$

$$= (\hat{i}\ 2,5 + \hat{j}\ 13) \text{ km/jam.}$$

Laju perahu terhadap tanah adalah besar vektor $\vec{v}_p$, jadi laju

$$\vec{v}_p = \sqrt{(2,5)^2 + (13)^2} = 13,24 \text{ m/det.}$$

membuat sudut Θ terhadap sumbu -x, dengan

$$\text{tg } \Theta = \frac{v_{py}}{v_{px}} = \frac{13}{2,5} = 5,2$$

atau

$$\Theta = 79^\circ 07'$$

Selanjutnya perhatikan Gb. I-26.
Perahu akan sampai pada tepian seberang pada titik C. Letak titik C dapat ditentukan jika kita tahu BC.

Jarak BC = (AB) tg α = (50 m) tg (79°07')

= (50 m)(0,19227) = 9,6135 m

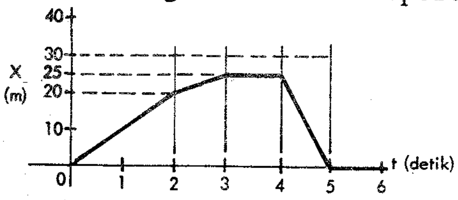
Soal latihan

1 Suatu partikel bergerak sepanjang garis lurus. Posisi partikel untuk berbagai saat dinyatakan pada tabel.

t (detik)	0	1	2	3	4	5	6
x(m)	0	0,1	0,8	3,7	6,4	12,5	21,6

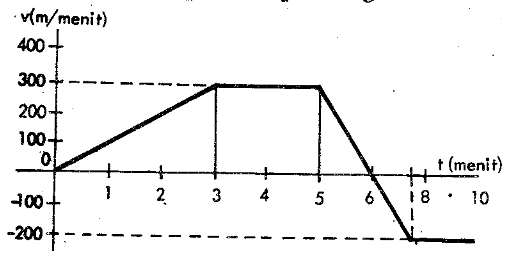
Hitunglah kecepatan rata-rata untuk selang waktu berikut
(a) t = 1 detik sampai t = 3 detik
(b) t = 2 detik sampai t = 5 detik

2 Data posisi suatu partikel yang bergerak lurus dilukiskan dalam sistem grafik x - t seperti pada gambar.



(a) Hitunglah kecepatan rata-rata dalam selang antara t = 0 detik sampai t = 3 detik.
(b) Hitunglah kecepatan sesaat pada t 1 detik, 2,5 detik, dan 3,5 detik.

3 Sebuah mobil bergerak pada suatu jalan yang lurus . Pengemudi mencatat laju mobil yang terbaca pada speedometer dan membuat grafik v - t seperti pada gambar.



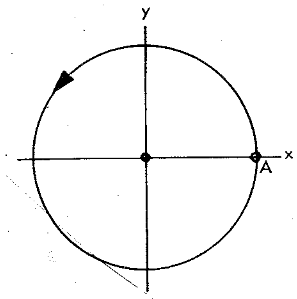
(a) Tentukan berapa *jarak* yang ditempuh dalam waktu 10 menit dari t = 0.
(b) Hitung *perpindahan* dari t = 0 hingga t = 10 menit.
(c) Pada saat mana mobil kembali ke tempat semula?
(d) Hitung percepatan sesaat pada t = 2 menit.

4 Persamaan gerak suatu partikel dinyatakan oleh fungsi $x = \frac{1}{10} t^3$ dalam m, t dalam detik.
(a) Hitung kecepatan rata-rata dalam selang t = 3 detik sampai t = 4 detik.
(b) Hitung kecepatan sesaat pada t = 5 detik.
(c) Hitung percepatan rata-rata dalam selang t = 3 detik sampai t = 4 detik.
(d) Hitung percepatan sesaat pada t = 5 detik.

5 Sebuah partikel bergerak pada suatu garis lurus. Percepatan gerak berubah dengan waktu sebagai fungsi $a(t) = 12\ t^2\ m/det^2$.
(a) Hitung kecepatan sesaat pada t = 2 detik, jika diketahui benda ada dalam keadaan berhenti pada saat t = 0.
(b) Hitung persamaan gerak benda jika diketahui pada saat

t = 2 detik benda ada pada posisi x = 1 m.
(c) Tentukan laju benda setelah menempuh jarak 66 m.

6 Sebuah partikel bergerak pada suatu lingkaran dengan laju tetap frekuensi putaran adalah 0,1 putaran/detik. Pada saat t = 0 benda ada pada titik A (lihat gambar). Jejari lingkaran adalah 10 m.



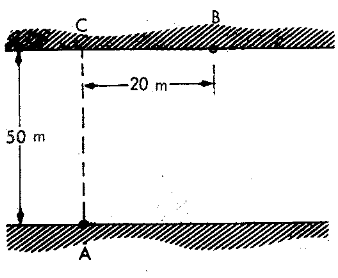
(a) Hitung kecepatan rata-rata antara t = 1 detik dan t = 3 detik.
(b) Hitung vektor percepatan pada saat t = 3 detik. Nyatakan hasil perhitungan anda dalam sistem koordinat kartesian.

7 Sebuah partikel bergerak pada lingkaran dengan jejari 5 m. Kecepatan sudut putar berubah dengan waktu menurut fungsi $\omega(t) = 2t^2$. Pada saat t = 0 benda ada dalam keadaan berhenti di titik paling atas pada lingkaran.
(a) Hitung vektor percepatan sentripetal pada saat t = 1 detik.
(b) Hitung vektor percepatan total pada t = 1 detik.

8 Sebuah peluru meriam ditembakkan membuat sudut 60° dengan arah horizontal. Tembakan dilakukan ke arah atas dilereng gunung yang membuat sudut 45° dengan arah horizontal, dengan laju awal v_o. Percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.
(a) Hitung posisi peluru waktu mengenai lereng gunung.
(b) Vektor kecepatan peluru waktu sampai dilereng gunung.

9 Sebuah partikel bergerak dalam lingkaran dengan percepatan sudut tetap. Partikel mula-mula diam, dan setelah 10 detik sudut yang ditempuh adalah 10,5 π radial. Jejari lingkaran adalah 2 m.
(a) Hitung percepatan sudut.
(b) Tentukan vektor percepatan pada saat t = 2 detik.

10 Seorang ingin menyeberangi sungai dari A ke B.
Laju air sungai adalah 10 km/jam arah ke kanan. Misalkan perahu dianggap bergerak dengan laju tetap, arah tegaklurus tepi sungai.
Tentukan laju dan arah perahu terhadap tanah agar maksud di atas tercapai.



2 Dinamika partikel

Dalam bab yang lalu kita telah membahas gerak suatu benda titik atau suatu partikel.
Kita tidak peduli apa yang menyebabkan benda melakukan gerak tersebut Alat pengamatan kita hanyalah mata, alat ukur jarak dan waktu, atau kamera. Itulah kinematika.
Dalam bab ini kita akan mempelajari lebih jauh lagi. Di sini kita menyelidiki apa menyebabkan lintasan partikel melengkung, dan apa yang menyebabkan terjadinya percepatan. Jadi kita akan membahas gerak partikel dari sudut *dinamika*, yaitu ilmu tentang gaya dan gerak.

2.1 HUKUM I NEWTON

Misalkan kita taruh sebuah buku di atas lantai, kita dorong sedikit kuat dan kita lepaskan. Kita semua tahu apa yang terjadi, buku akan terus bergerak pada garis lurus dan kemudian berhenti.
Orang jaman dahulu mengambil kesimpulan, bahwa agar benda dapat bergerak maka pada benda harus terus menerus dilakukan pengaruh luar atau gaya. Mereka pikir keadaan alamiah suatu benda adalah keadaan diam. Agar sebuah benda bergerak pada garis lurus dengan kecepatan tetap, mereka percaya bahwa sesuatu diluar benda harus terus tetap menggerakkannya; jika tidak, benda tersebut akan kembali kepada keadaan aslinya, yaitu diam.
Mungkin anda merasa aneh bahwa teori gerak seperti ini dianut orang pada waktu itu, yaitu sampai abad ke-16. Baru kemudian seorang Italia bernama Galileo Galilei (1564-1642) mencoba memikirkan lebih jauh, dan mempergunakan eksperimen untuk menentukan kebenaran akan teori di atas.
Dari pengalaman kita tahu bahwa jika permukaan dimana benda bergerak dibuat makin licin, maka perlambatan benda akan berkurang.
Dengan dorongan yang sama, benda akan lebih lama bergerak jika permukaannya lebih licin.
Dapat kita ambil kesimpulan bahwa jika kita gunakan suatu permukaan yang dipasang horizontal, dan gesekan antara benda dan permukaan dihilangkan sama sekali, maka jika di dorong sedikit benda akan bergerak pada garis lurus tanpa akan berhenti. Dengan kata lain benda akan bergerak lurus beraturan (dengan kecepatan tetap).
Eksperimen ini mula-mula dilakukan oleh Galileo, dan kesimpulan di atas dikenal sebagai *prinsip Galileo*. Galileo menyatakan bahwa untuk *mengubah* kecepatan suatu benda diperlukan suatu gaya luar, akan tetapi untuk mempertahankan kecepatan pada suatu nilai (dan arah) tertentu tidaklah diperlukan gaya luar.

Prinsip Galileo ini kemudian diambil oleh Isaac Newton (1642-1727) sebagai suatu hukum, dan kemudian dikenal sebagai *hukum I Newton*. Isaac Newton adalah seorang Inggris yang lahir pada tahun yang sama dengan kematian Galileo, dan merupakan arsitek utama dari mekanika klasik. Tiga buah hukum mekanika Newton dan satu hukum tentang gaya gravitasi merupakan kerangka utama mekanika klasik.

Dalam bentuk hukum pertama Newton, prinsip Galileo dinyatakan sebagai berikut:

Setiap benda akan tetap berada pada keadaan diam atau gerak lurus beraturan, kecuali jika benda itu dipaksa untuk mengubah keadaan tersebut oleh gaya-gaya yang dikerjakan padanya.

Perlu disadari bahwa prinsip ini tidak dibuktikan secara matematik, akan tetapi disimpulkan secara umum dari pengalaman sehari-hari. Kita sering terpaksa mempergunakan cara seperti ini dalam ilmu. Apakah cara ini baik atau tidak, bergantung pada apakah pemikiran selanjutnya yang diambil berdasar kesimpulan umum seperti di atas cocok dengan eksperimen atau tidak.

Untuk membuktikan hukum pertama Newton, kita perlu membuat definisi kata "gaya" dalam hukum tersebut. Sampai di sini kita belum melakukan ini, meskipun kita telah mengartikan gaya dengan pengaruh luar. Jadi kita lebih menggunakan intuisi dalam mengartikan gaya. Dalam ilmu, suatu pengertian harus diberi dasar yang lebih kuat dari pada intuisi; suatu pengertian haruslah didefinisikan secara kuantitatif dan operasionil. Kita harus dapat menghitung dan mengukur apa yang dinyatakan dalam suatu konsep atau pengertian. Secara logika kita dapat mempergunakan hukum pertama Newton sebagai definisi untuk gaya; maka gaya dapat didefinisikan sebagai apa yang menyebabkan perubahan kecepatan. Definisi ini belumlah kuantitatif, akan tetapi memang cocok dengan intuisi kita tentang gaya.

Hukum I Newton juga memperkenalkan kita dengan satu pengertian lagi. Sifat bahwa benda akan tetap berada pada keadaannya, yaitu diam atau bergerak lurus beraturan, disebut sifat *inersia*. Jadi inersia adalah sifat benda yang menyatakan hambatannya terhadap perubahan gerak. Kata inersia adalah terjemahan dari kata Inggris *inertia*, yang merupakan bentuk kata benda dari kata sifat *inert;* salah satu arti kata inert adalah tidak mudah bergerak, berubah, atau berbuat. Seringkali kata *inertia* juga diterjemahkan sebagai *kelembaman*.

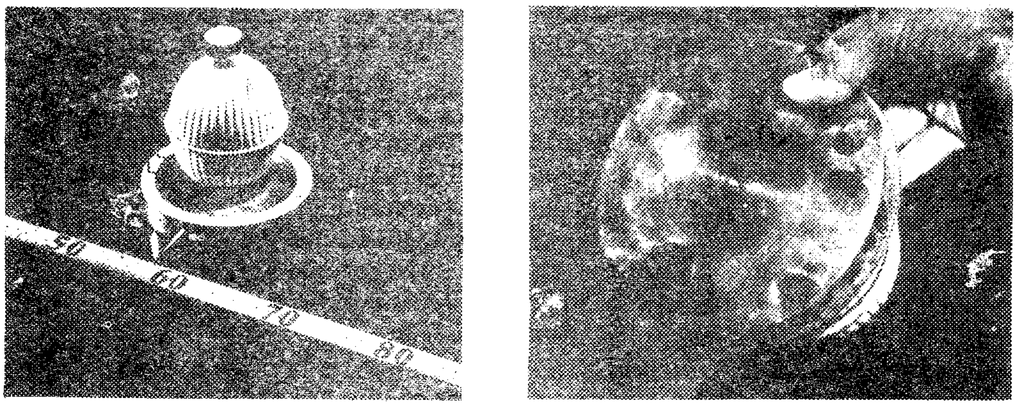
Dalam hukum kedua Newton, sifat inersia ini diberi definisi yang kwantitatif, dan diberi nama *massa*. Jadi *massa suatu benda tidak lain adalah pengertian kuantitatif dan operasionil dari sifat inersia benda.*

2.2 HUKUM II NEWTON

Sebelum kita menyatakan hukum II Newton, kita perlu membahas lebih dahulu pengertian gaya dan massa secara lebih kuantitatif.

Pengertian atau konsep tentang gaya yang paling primitip adalah *dorongan* atau *tarikan* yang dilakukan oleh otot-otot kita. Kita tahu, bahwa dengan mendorong atau menarik suatu benda, kita dapat merubah kecepatannya. Makin keras kita mendorong atau menarik, makin besar pula perubahan kecepatan atau percepatan yang dihasilkan. Pernyataan ini hanya memperkuat pengertian intuitif kita tentang gaya berdasar

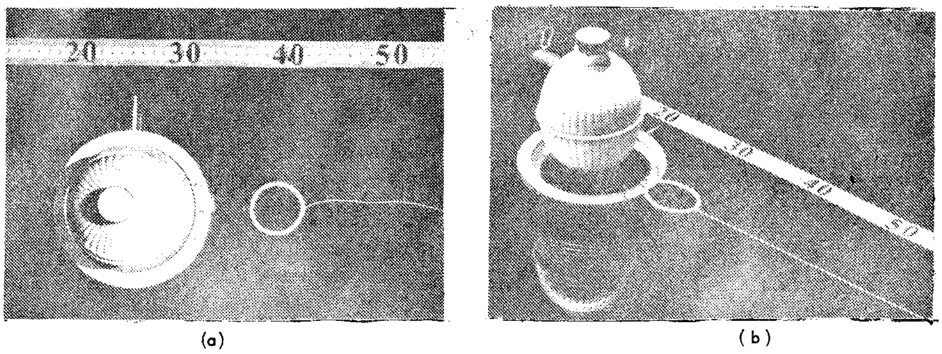
pada hukum pertama Newton, dimana dinyatakan bahwa gaya adalah penyebab percepatan. Untuk keperluan ilmu, definisi gaya haruslah eksak dengan menyatakan bagaimana cara mengukurnya.
Untuk ini kita harus melakukan suatu eksperimen. Kita ingin agar dalam bidang gerak benda hanya bekerja gaya luar yang kita lakukan. Untuk menghilangkan pengaruh gaya berat benda, kita buat agar benda bergerak dalam bidang horizontal. Kemudian kita harus dapat menghilangkan atau mengurangi sebanyak mungkin gaya gesekan yang ada. Pada jaman sekarang dengan alat tertentu kita dapat melakukan ini. Pertama kita perlukan suatu bidang datar yang rata dan mempunyai permukaan halus, misalnya selembar kaca dengan tebal 5 mm, dan ukuran 2m × 3m, dan kita pasang di atas meja secara horizontal. Pergunakan waterpas untuk keperluan ini. Kemudian kita perlu sebuah benda yang dapat bergerak di atas kaca tanpa gesekan. Suatu benda yang kita sebut *cupu es* (Inggris: *ice puck*) dapat kita pergunakan untuk maksud ini. Cupu es dibuat dengan harga-harga berat tertentu; sedang bentuk dan konstruksinya kira-kira seperti pada Gb. 2-1.



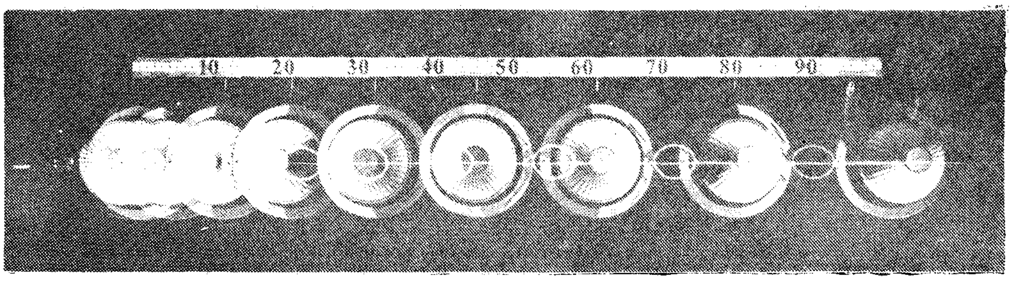
GB. 2.1 CUPU ES

Di dalam cupu es ditaruh serbuk kristal CO_2 yang disebut *es-kering;* bentuknya seperti salju, temperaturnya sekitar -30°C, akan tetapi kalau dipegang terasa kering, karena serbuk CO_2 terus menguap menjadi gas, tidak melewati fasa cair. Es kering ini dipergunakan dalam industri es krim. Gas CO_2 yang terjadi karena penguapan es kering disalurkan pada lubang di bagian bawah cupu dan membentuk suatu bantalan gas antara cupu dan permukaan kaca. Gesekan yang dialami cupu hanyalah gesekan udara. Mungkin anda bertanya, karena es-kering menguap terus, apakah massa benda tidak berubah terus. Ini memang terjadi, akan tetapi karena pengukuran kita hanya memerlukan waktu beberapa menit, dan mungkin juga ketelitiannya tidak terlalu besar, maka perubahan massa selama pengukuran dapat diabaikan.
Dalam keadaan ini, jika kita tonjok sedikit, cupu es ini akan bergerak lurus beraturan, sampai jatuh dari meja, atau jika pada tepi kaca kita beri penghalang, sampai menumbuk dan dipantulkan oleh pinggir penghalang. Perlengkapan selanjutnya yang kita perlukan adalah sebuah benda yang bentuknya berubah jika ditarik atau didorong. Sebuah gelang tipis terbuat dari plastik yang ringan dan elastis dapat kita pergunakan untuk maksud ini. Jika gelang ini kita lepaskan, maka akan mempunyai bentuk lingkaran, dan jika ditarik akan mempunyai

elips. Untuk tarikan yang tidak terlalu kuat sumbu panjang elips kira-kira sebanding dengan gaya tarikan.
Terakhir, kita harus mengukur percepatan gerak benda. Untuk ini kita perlu kamera stroboskopik dan ruang gelap. Lampu kamera ini menyala misalnya setiap 2 detik untuk jangka waktu 0,01 detik.
Jika film kita cetak, maka kita akan memperoleh gambar seperti pada Gb. 2-3. Waktu antara dua gambar cupu berturutan adalah 2 detik, sedang jarak antara gambar dua cupu berturutan dapat diukur.
Sekarang eksperimennya. Yang dapat langsung diukur adalah percepatan. Kita ambil sebuah cupu es dengan massa tertentu, dan ini kita ambil sebagai massa standar. Pada cupu kita pasang gelang plastik dan kita tarik sehingga gelang membentuk elips. (lihat Gb. 2-2).

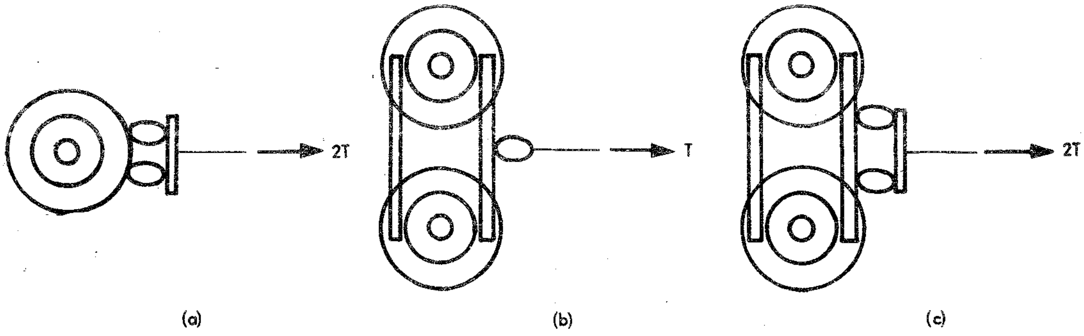


GB. 2-2 (A) TIDAK ADA GAYA TARIK PADA TALI, GELANG BERBENTUK LINGKARAN
(B) GAYA TARIK PADA TALI MENYEBABKAN GELANG BERBENTUK ELIPS. UNTUK GAYA YANG TERLALU BESAR SUMBU PANJANG ELIPS SEBANDING DENGAN GAYA TARIKAN PADA TALI



GB. 2-3 GERAK BENDA KARENA PENGARUH GAYA POTRET BENDA DIAMBIL SETIAP 2 DETIK, POSISI BENDA DAPAT DIUKUR DENGAN MISTAR

Sekarang cupu kita tarik pada arah tertentu, dan kita usahakan agar gelang bentuknya tetap. Dengan demikian kita dapat usahakan agar gaya tarikan yang kita lakukan tidak berubah besarnya. Sementara itu kita minta seorang teman untuk mengamati gerak cupu, dengan mencatat persamaan geraknya, yaitu posisi cupu sebagai fungsi waktu. Dengan demikian dapat diamati bahwa untuk suatu massa tertentu, ditarik oleh suatu gaya tertentu akan dihasilkan suatu gerak lurus dipercepat beraturan dengan percepatan tertentu pula.
Sekarang kita rancang eksperimen-eksperimen lain seperti pada Gb. 2-4. Dalam tiap eksperimen kita buat agar sumbu panjang elips dari gelang adalah tetap, sehingga kita pasti bahwa setiap tarikan besarnya gaya adalah T. Untuk setiap eksperimen kita amati percepatan gerak.



GB.2-4 (A) SATU CUPU, DUA GELANG; BERARTI SATU MASSA STANDAR DITARIK DENGAN GAYA 2T
(B) DUA CUPU, SATU GELANG; BERARTI DUA MASSA STANDAR DITARIK DENGAN GAYA T
(C) DUA CUPU, DUA GELANG; BERARTI DUA MASSA STANDAR DITARIK DENGAN GAYA 2T

Jika ini semua kita lakukan maka akan didapat hasil seperti dalam Tabel 2-1.

TABEL 2-1

eksperimen	massa (m)	gaya (f)	percepatan (a)
1	1 cupu	1 gelang	a
2	1 cupu	2 gelang	2 a
3	2 cupu	1 gelang	a/2
4	2 cupu	2 gelang	a

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa gaya untuk tiap satuan massa adalah sebanding dengan percepatan yang dihasilkan.
Jadi dapat kita tuliskan

$$F/m \propto a \qquad (2\text{-}1)$$

atau

$$F = C\, m\, a\ , \qquad (2\text{-}2)$$

dimana C adalah suatu tetapan.
Dengan mengambil sebuah benda tertentu sebagai suatu massa standar, kita dapat definisikan suatu satuan gaya. Suatu tarikan yang bekerja pada suatu satuan massa standar dan menghasilkan satu satuan percepatan kita sebut suatu satuan gaya. Sehingga dengan cara begini tetapan C = 1, dan hubungan di atas dapat ditulis sebagai F = m a.
Pada jaman sekarang orang sudah setuju untuk menyebut suatu benda yang tersimpan di kota Sevres, Perancis, sebagai massa standar dengan harga massa *satu kilogram*. Kemudian di setiap negara disimpan duplikat dari massa standar dan juga diberi harga satu kilogram.
Dengan cara demikian orang dapat mengukur gaya yang besarnya sebarang Suatu gaya T' dilakukan pada massa standar dan menghasilkan percepatan a'. Maka besar gaya tersebut, adalah:

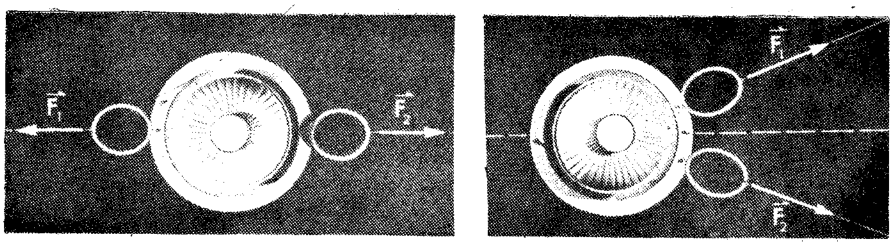
$$F' = \frac{a'}{a_s}\, F_s$$

dimana F_s adalah satuan gaya yang jika bekerja pada massa standar menghasilkan satu satuan percepatan a_s.
Dengan cara begini kita dapat membuat definisi gaya secara operasionil.
Di atas sudah dikatakan bahwa jika kita pergunakan suatu sistem satuan tertentu maka kita dapatkan bahwa hubungan antara gaya, massa, dan percepatan yang dihasilkan dapat ditulis sebagai

$$F = m\, a \qquad (2\text{-}3)$$

Hubungan di atas tidak lain adalah hukum II Newton, suatu hubungan yang merupakan titik tolak pembahasan semua persoalan dinamika.

Kita lihat bahwa dalam persamaan (2-3) terkandung empat buah besaran yaitu gaya, massa, panjang dan waktu. Dua yang terakhir tergabung sebagai satuan dari percepatan a.
Jelas bahwa kita hanya perlu tiga buah satuan dasar, karena yang ke-empat dapat diturunkan dari persamaan (2-3).
Sistem satuan yang mempergunakan massa, panjang, dan waktu sebagai besaran dasar disebut *sistem satuan dinamik*. Ada dua sistem satuan dinamik, yaitu sistem satuan MKS, dan sistem satuan cgs.
Dalam sistem satuan MKS orang menggunakan *meter*, *kilogram*, dan *detik* (sekon) sebagai satuan standar. Untuk dua besaran ini, yaitu panjang dan massa, orang telah membuat besaran standar, yaitu meter standar dan kilogram standar. Sedang sebagai standar waktu dipergunakan perioda dari gelombang cahaya yang dikeluarkan oleh gas cesium yang menyala.
Dalam sistem satuan MKS, satuan gaya adalah satuan turunan, dan mempunyai harga kg m/det^2. Agar lebih singkat satuan turunan ini disebut *newton*.
Dalam sistem satuan dinamik cgs, dipergunakan *sentimeter*, *gram*, dan *detik* (sekon) sebagai satuan-satuan dasar untuk panjang, massa, dan waktu. Dalam sistem satuan ini gaya mempunyai satuan gram cm/det^2, atau disebut *dyne*. Jelas bahwa 1 newton = 10^5 dyne.
Sistem satuan yang lain mempergunakan gaya, panjang dan waktu sebagai sistem satuan dasar. Sistem seperti ini disebut *sistem statik*.
Sebuah sistem satuan statik yang masih digunakan orang sampai sekarang adalah sistem satuan Inggris. Dalam sistem satuan ini gaya dinyatakan dalam *pound (disingkat lb)*, panjang dinyatakan dalam foot (ft), dan waktu dinyatakan dalam detik (sekon). Dalam sistem satuan ini, satuan massa adalah satuan turunan, dan disebut *slug*.
Dalam membahas listrik dan kemagnetan orang sudah setuju untuk menggunakan sistem satuan MKS, sehingga rumus-rumus dalam listrik dan kemagnetan adalah dalam sistem satuan MKS. Jelas bahwa dari tiga sistem satuan di atas, sistem MKS-lah yang terpenting,
Setelah kita definisikan gaya dan massa, kita sekarang dapat menyelidiki sifat-sifat gaya. Inipun dapat diselidiki dengan mempergunakan eksperimen cupu-es seperti yang dibahas di depan. Dengan menggunakan eksperimen seperti pada Gb. 2-5 kita dapat menunjukkan bahwa gaya memenuhi sifat penjumlahan vektor, sehingga dapat disimpulkan pula bahwa gaya adalah sebuah *besaran vektor*.



GB. 2-5 EKSPERIMEN UNTUK MENUNJUKKAN SIFAT VEKTOR DARI GAYA

Pada umumnya massa adalah suatu besaran skalar sehingga persamaan (2-3) dapat dituliskan sebagai

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{2-4}$$

Jika pada benda titik atau partikel bekerja lebih dari satu gaya, maka persamaan (2-4) harus ditulis:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (2\text{-}5a)$$

dimana $\sum \vec{F}$ adalah jumlah vektor semua gaya luar yang bekerja pada benda tersebut

Dalam menggunakan persamaan 2.4, kita harus uraikan vektor nilai $\vec{F}$ dan percepatan a dalam komponen-komponennya

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x &= m\,a_x \\ \sum F_y &= m\,a_y \end{aligned}\right\} \quad 2-5b$$

Jika $\sum \vec{F} = 0$, maka gaya resultan pada benda sama dengan nol, sehingga a = 0, berarti bahwa benda berada dalam keadaan diam atau terus bergerak lurus beraturan. Persoalan seperti ini menjadi pusat perhatian cabang mekanika yang disebut *statika.*

Tampak bahwa hukum I Newton adalah hal khusus dari hukum II Newton, yaitu bila $\sum \vec{F} = 0$, sehingga sebetulnya hukum pertama dan kedua saling berhubungan.

2.3 HUKUM III NEWTON

Suatu gaya yang bekerja pada sebuah benda selalu berasal dari benda lain. Jadi suatu gaya sebetulnya adalah hasil interaksi antara dua benda. Kita dapatkan, bahwa jika sebuah benda melakukan gaya pada sebuah benda lain, benda kedua selalu melakukan gaya balasan pada benda pertama. Di samping itu kedua gaya ini mempunyai besar yang sama dan arah berlawanan.

Jika salah satu dari gaya yang terjadi pada interaksi antara dua buah benda tersebut *gaya "aksi"*, maka gaya yang lainnya disebut *gaya "reaksi"*. Mana yang "aksi" atau "reaksi" tidaklah penting di sini sebab kedua gaya ini bukanlah timbul sebagai sebab akibat, akan tetapi dua gaya yang selalu timbul bersama-sama, sehingga yang satu bukanlah merupakan sebab atau akibat dari yang lain.

Sifat gaya-gaya seperti ini pertama kali diketemukan oleh Newton dalam hukum geraknya yang ketiga. Setiap aksi selalu dilawan oleh reaksi yang sama *besarnya;* atau, aksi timbal-balik dari dua benda adalah selalu sama besar, dan mempunyai arah berlawanan.

Secara singkat hukum III Newton menyatakan bahwa

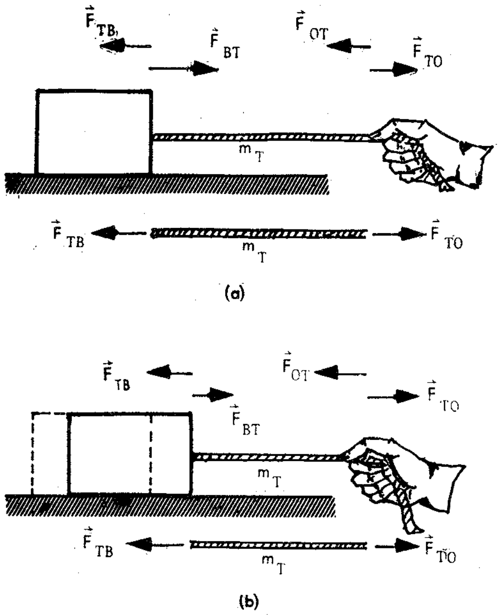
$$\vec{F}_{aksi} = -\vec{F}_{reaksi} \qquad (2\text{-}6)$$

Yaitu bahwa gaya aksi besarnya sama dengan reaksi, akan tetapi arahnya berlawanan.

Contoh 2-1

Seorang menarik seutas tali horizontal yang dihubungkan dengan sebuah balok yang terletak di atas sebuah meja horizontal seperti pada Gb. 2-6.

Orang menarik tali dengan gaya $\vec{F}_{TO}$. Jadi $\vec{F}_{TO}$ adalah gaya *pada tali* oleh orang. Tali melakukan gaya reaksi F_{OT} pada orang, maka $F_{OT} = -F_{TO}$. Di samping itu, tali melakukan gaya F_{BT} pada balok, dan balok melakukan gaya reaksi $\vec{F}_{TB}$ pada tali. Maka $F_{TB} = -\vec{F}_{BT}$.



GB. 2-6 SESEORANG MENARIK PADA TALI YANG TERIKAT PADA SEBUAH BALOK
(A) GAYA YANG DILAKUKAN OLEH BALOK PADA TALI DAN GAYA PADA TALI OLEH ORANG SAMA BESAR DAN BERLAWANAN AKIBATNYA GAYA RESULTAN PADA TALI SAMA DENGAN NOL. TALI TIDAK BERGERAK DIPERCEPAT
(B) GAYA PADA TALI OLEH SEORANG LEBIH BESAR DARI GAYA PADA TALI OLEH BALIK. BESAR $\vec{F}_{TO} - \vec{F}_{TB}$ DAN MENGARAH KE KANAN. TALI BERGERAK KE KANAN. PADA BALOK JUGA BEKERJA GAYA GESEKAN, AKAN TETAPI TIDAK DITUNJUKKAN DI SINI

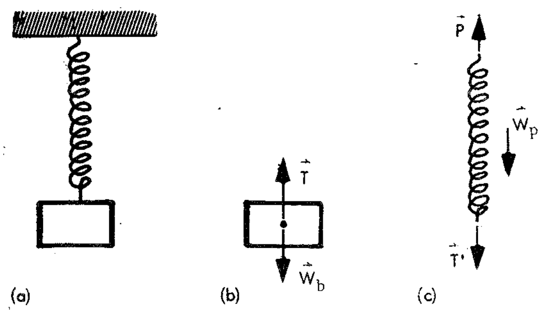
Misalkan tali mempunyai massa m_T. Maka agar balok dan tali dapat mulai bergerak harus terjadi percepatan, misalnya a. Gaya-gaya harus bekerja pada tali hanyalah $\vec{F}_{TO}$ dan $\vec{F}_{TB}$, sehingga resultan gaya yang bekerja pada tali adalah $\vec{F}_T = \vec{F}_{TO} + \vec{F}_{TB}$ dan ini *tidak boleh* sama dengan nol jika tali harus bergerak dipercepat. Dari hukum Newton kita dapatkan :

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{TO} + \vec{F}_{TB} = m_T\vec{a},$$

Karena gaya-gaya pada tali semuanya pada arah horizontal, maka kita dapat tanggalkan tanda vektor, dan kita dapatkan hubungan

$$F_T = F_{TO} - F_{TB} = m_T a$$

Tampak bahwa pada umumnya F_{TO} besarnya tidak sama dengan F_{TB} (Gb. 2-6b). Ingat kedua gaya ini bekerja pada *benda yang sama*, jadi *bukan* pasangan aksi dan reaksi.
Perhatikan bahwa gaya F_{TO} selalu sama besar dengan gaya F_{OT}, dan bahwa besar F_{TB} selalu sama dengan besar gaya F_{BT}. Akan tetapi pasangan gaya F_{OT} dan $\vec{F}_{TO}$ mempunyai besar yang sama dengan pasangan gaya F_{TB} dan F_{BT} hanya jika percepatan tali a = 0. Hanya dalam hal khusus ini kita dapat membayangkan bahwa tali melulu *meneruskan* gaya yang dilakukan oleh orang pada balok tanpa ada perubahan.
Hal yang sama juga berlaku jika massa tali $m_T = 0$. Dalam kenyataan, kita tidak pernah menjumpai tali dengan massa sama dengan nol.
Akan tetapi seringkali massa tali dapat diabaikan, sehingga tali dapat dianggap meneruskan gaya tanpa ada perubahan. Gaya yang terjadi di setiap titik pada tali disebut *gaya-tarik* pada titik tersebut.
Gaya tarik ini mempunyai besar yang sama untuk setiap titik pada tali hanya jika tidak ada percepatan, atau jika massa tali sama dengan nol.



GB. 2-7 (A) BALOK DIGANTUNG PADA PEGAS
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK BALOK
(C) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK PEGAS

Contoh 2-2

Misalkan sebuah pegas diikat pada langit-langit, dan ujung yang lain dihubungkan dengan sebuah balok seperti pada Gb. 2-7a.
Balok berada dalam keadaan diam.
Karena semua berada dalam keadaan diam, maka gaya resultan yang bekerja pada benda haruslah sama dengan nol. Pada balok bekerja dua buah gaya, yaitu gaya $\vec{T}$, gaya tarik dalam

pegas yang mengembang, dan $\vec{W}$, tarikan pada balok oleh bumi, yang tidak lain adalah gaya berat benda.
Hal ini ditunjukkan pada Gb. 2-7b.
Resultan dari semua gaya yang bekerja pada balok adalah $\vec{T} + \vec{W}_b$. Dalam hukum II Newton, gaya $\vec{F}$ menyatakan *vektor dari semua jumlah* gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda, sehingga untuk balok

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{W}_b$$

Karena balok berada dalam keadaan diam, maka percepatannya adalah nol,

$$\vec{a} = 0$$

Jadi dari hubungan $\vec{F} = m\,\vec{a}$, kita peroleh

$$\vec{T} + \vec{W}_b = 0 \qquad \text{atau} \qquad \vec{T} = -\,\vec{W}_b .$$

Gaya-gaya ini bekerja pada garis yang sama, sehingga besar kedua gaya ini sama, atau $T = W$
Jadi gaya tarik pada pegas adalah suatu ukuran yang tepat untuk berat balok. Kita akan menggunakan hasil khusus ini di belakang untuk mengukur gaya secara statik.
Sekarang, marilah kita pandang gaya-gaya yang bekerja pada pegas; gaya-gaya ini ditunjukkan pada Gb. 2-7c.
Gaya $\vec{T}'$ adalah tarikan pada pegas oleh balok, dan merupakan gaya reaksi untuk gaya aksi $\vec{T}$. Jadi gaya $\vec{T}'$ mempunyai besar sama dengan gaya $\vec{T}$, yaitu $\vec{W}$. Gaya P adalah tarikan ke atas pada pegas oleh langit-langit, dan gaya $\vec{W}_p$ adalah berat pegas, yaitu tarikan pada pegas oleh bumi.
Karena pegas berada dalam keadaan diam, dan semua gaya bekerja pada garis yang sama, kita peroleh:

$$\vec{P} + \vec{T}' + \vec{W}_p = 0 \qquad \text{atau} \qquad \vec{P} = \vec{W}_b + \vec{W}_p$$

Jadi langit-langit menarik pegas dengan gaya yang sama dengan jumlah berat balok dan pegas.
Dari hukum III Newton, gaya yang dilakukan oleh pegas pada langit-langit, yaitu $\vec{P}'$, harus sama dengan $\vec{P}$, karena kedua gaya ini adalah pasangan gaya aksi dan reaksi.
Pada umumnya gaya-gaya pada kedua ujung pegas tidaklah sama, karena $\vec{P} \neq \vec{T}'$. Dalam hal khusus dimana *berat pegas dapat diabaikan*, $\vec{W}_p = 0$, maka $\vec{P} = \vec{T}' = \vec{W}_b$. Jadi sebuah pegas atau tali tanpa berat dapat dianggap meneruskan gaya dari satu ujung ke ujung lain tanpa ada perubahan.
Marilah kita lihat pasangan-pasangan gaya aksi-reaksi dalam contoh ini. Reaksi untuk gaya $\vec{W}_b$, yaitu pada balok oleh bumi, haruslah gaya pada bumi oleh balok. Begitu juga, reaksi untuk gaya $\vec{W}_p$ adalah gaya pada bumi oleh pegas. Karena bumi massanya adalah besar, maka kita tidak harapkan bumi mendapat percepatan yang begitu berarti oleh gaya-gaya ini. Gaya-gaya $\vec{T}$ dan $\vec{T}'$ adalah pasangan aksi-reaksi, begitu juga $\vec{P}$ dan $\vec{P}'$. Perhatikan bahwa gaya $\vec{T} = \vec{W}_b$ dalam contoh ini *bukan* pasangan aksi-reaksi, karena gaya ini bekerja pada benda yang *sama*.

2.4 BERAT DAN MASSA

Berat suatu benda adalah gaya pada benda karena tarikan bumi. Gaya

tarik bumi ini adalah *gaya gravitasi*, yaitu gaya tarik menarik yang selalu terjadi antara dua benda yang mempunyai massa. Karena berat adalah sebuah gaya, maka berat adalah suatu besaran vektor. Arah vektor berat adalah arah gaya gravitasi, yaitu menuju pusat bumi. Besar gaya berat dinyatakan dalam satuan gaya, yaitu newton atau pound. Jika sebuah benda dengan massa m dibiarkan jatuh dengan bebas, percepatannya adalah percepatan gravitasi g, dan gaya yang bekerja adalah gaya berat benda tersebut, yaitu $\vec{W}$. Jika hukum II Newton, yaitu $\vec{F} = m\,\vec{a}$, diterapkan pada benda jatuh bebas, maka gaya berat $\vec{W} = mg$.
Gaya $\vec{W}$ dan percepatan $\vec{g}$ keduanya adalah vektor yang mengarah ke pusat bumi. Maka kita dapat dituliskan:

$$W = m\,g$$

dengan W dan g masing-masing adalah besar vektor $\vec{W}$ dan $\vec{g}$. Untuk menahan agar benda tidak jatuh, maka kita harus melakukan gaya ke atas sebesar $\vec{W}$ pada benda tersebut, agar gaya total pada benda tadi sama dengan nol. Dalam gambar 2-7b gaya tarik dalam pegas memberikan gaya penahan ini. Ini berarti bahwa jika kita diberi tahu massa sebuah benda, kita dapat menggunakan persamaan 2-7 untuk menghitung beratnya. Didapatkan dengan eksperimen, bahwa percepatan gravitasi g mempunyai harga yang sama untuk semua benda yang terletak pada *tempat yang sama*. Dari kenyataan ini jelas bahwa perbandingan berat dua benda haruslah sama dengan perbandingan massa kedua benda tersebut. Jadi suatu neraca, yang tidak lain adalah alat untuk membandingkan dua gaya arah ke bawah, dapat dipergunakan untuk membandingkan massa. Jika sejumlah garam yang ditaruh pada salah sebuah piringan neraca mendorong ke bawah pada piringan tersebut dengan gaya yang sama dengan batu timbangan bermassa 1 gram pada piringan yang lain, maka kita tahu bahwa massa sejumlah garam tersebut adalah 1 gram. Seringkali kita katakan bahwa garam tersebut mempunyai "berat" 1 gram, meskipun gram adalah satuan massa, jadi bukan satuan gaya. Dalam dinamika pengertian massa dan berat harus dibedakan.
Sudah kita lihat bahwa berat sebuah benda, yaitu tarikan ke bawah oleh bumi, adalah suatu besaran vektor. Massa suatu benda adalah suatu besaran skalar. Hubungan kuantitatif antara berat dan massa diberikan oleh $\vec{W} = m\,\vec{g}$. Besar percepatan gravitasi g bergantung pada tempat, sehingga berat W dari sebuah benda dengan massa m juga akan berbeda untuk tempat yang berbeda. Sebuah benda dengan massa 1 kg di tempat dengan harga $g = 9{,}80$ m/det^2 adalah 9,80 newton; di tempat dengan $g = 9{,}78$ m/det^2 benda yang sama mempunyai berat 9,78 newton.

Jika berat ini ditentukan dengan mengukur pertambahan panjang sebuah pegas yang menahannya agar tidak jatuh, perbedaan berat dari sebuah benda yang sama pada dua tempat yang berbeda akan tampak dari sedikit perbedaan bertambah panjangnya pegas pada dua tempat ini. Jadi berbeda dengan *massa* sebuah benda, yang merupakan sifat hakiki (intrinsik) dari sebuah benda, *berat* benda bergantung pada tempat dimana benda berada. Skala timbangan pegas akan menunjuk angka berbeda, akan tetapi neraca menunjukkan hasil yang sama. Di ruang antariksa dimana pengaruh gravitasi adalah nol, berat benda juga sama dengan nol, meskipun massa benda, yaitu sifat inersia benda tetap sama dengan di bumi.
Untuk mempercepat sebuah benda dalam ruang bebas gravitasi diperlukan usaha yang sama seperti halnya mempercepat benda tersebut pada permukaan meja horizontal tanpa gesekan di permukaan bumi. Akan te-

tapi untuk menyangga benda melawan tarikan bumi perlu gaya lebih besar di bumi daripada di ruang antariksa, karena berat benda di dua tempat tersebut tidak sama.

Seringkali kita tidak diberitahu massa benda, akan tetapi diberi harga berat W, dimana gaya-gaya bekerja. Dari hubungan $\vec{F} = m\,\vec{a}$ dan $W = m\,g$ kita peroleh:

$m = W/g$, sehingga $\vec{F} = (W/g)\,\vec{a}$

Kuantitas W/g memegang peranan m dalam persamaan $F = m\,a$, dan memang tidak lain adalah massa sebuah benda yang mempunyai berat W. Sebagai contoh, seorang dengan berat 160 lb pada tempat dengan g = 32,0 ft/det² mempunyai massa $m = W/g = (160\text{ lb})/(32{,}0\text{ ft/det}^2) = 5{,}00$ slug. Perhatikan bahwa di tempat lain, dimana g = 32,2 ft/det², berat orang tersebut

$$W = m\,g = (5{,}00\text{ slug})(32{,}2\text{ ft/det}^2) = 161\text{ lb.}$$

2.5 MENGUKUR GAYA DENGAN CARA STATIK

Dalam fatsal 2.2 kita telah membahas satu cara untuk mengukur gaya dengan menentukan perubahan keadaan gerak jika dilakukan gaya pada suatu benda. Cara ini dapat disebut cara *dinamik* untuk mengukur gaya. Cara lain untuk mengukur gaya berdasar pada pengukuran perubahan bentuk atau ukuran sebuah benda yang berada dalam keadaan diam, jika pada benda tersebut dilakukan gaya. Cara pengukuran gaya ini dapat disebut cara *statik*. Cara dinamik dipergunakan untuk memberi definisi kuantitatif tentang gaya, dan memberikan hukum kedua Newton. Cara statik menggunakan hukum pertama, yang tidak lain adalah hal khusus untuk hukum kedua, dan juga mempergunakan hukum ketiga.

Cara pengukuran statik ini berdasar pada kenyataan bahwa jika pada sebuah benda bekerja beberapa gaya, sedang benda mempunyai percepatan nol, maka jumlah vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda sama dengan nol. Ini tidak lain adalah pernyataan hukum pertama Newton.

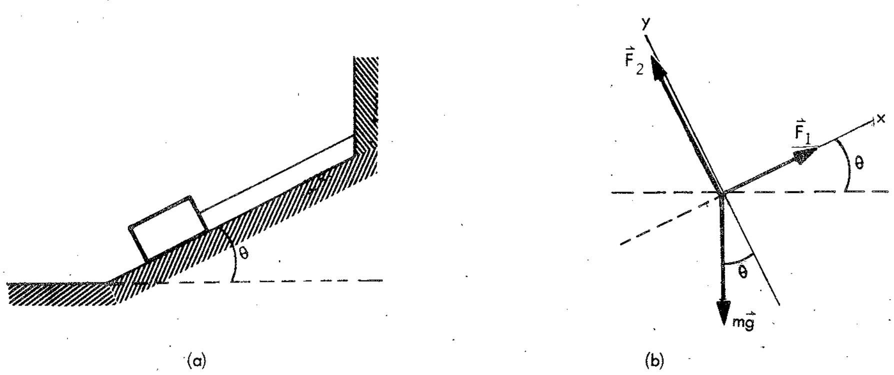
Alat yang biasa dipergunakan untuk mengukur gaya dengan cara statik adalah timbangan pegas. Alat ini terdiri dari pegas kumparan dengan jarum yang dipasang pada salah satu ujungnya. Jarum ini dapat bergerak pada sebuah skala. Suatu gaya yang bekerja pada timbangan merubah panjang pegas. Jika sebuah benda dengan berat 1 newton digantungkan pada pegas, maka pegas akan bertambah panjang, sampai tarikan oleh pegas mempunyai besar sama dengan berat benda. Suatu tanda dapat dibuat pada skala dimana jarum berada, dan diberi tulisan 1 newton. Dengan cara yang sama, benda dengan berat 2 newton, 3 newton dan sebagainya dapat digantung pada pegas dan tanda yang bersangkutan diberikan pada letak jarum pada nilai beban di atas. Dengan cara begini pegas kita *kalibrasi*. Di sini kita anggap bahwa gaya yang bekerja pada pegas adalah selalu sama besar jika jarum menunjuk pada nilai skala yang sama. Pegas yang telah dikalibrasikan sekarang dapat dipergunakan untuk mengukur gaya sebarang.

Hukum ketiga diam-diam kita gunakan, yaitu bahwa besar gaya yang dilakukan oleh pegas pada beban adalah sama dengan besar gaya yang dilakukan oleh beban pada pegas. Gaya terakhir inilah yang ingin kita ukur. Hukum pertama digunakan karena kita anggap bahwa gaya F adalah nol, jika percepatan $\vec{a} = 0$.

2.6 BEBERAPA CONTOH PEMAKAIAN

Hukum II Newton menyatakan bahwa jumlah vektor dari semua gaya yang bekerja pada sebuah benda adalah sama dengan massa dikalikan dengan percepatan benda tersebut. Langkah pertama yang harus diambil dalam memecahkan persoalan adalah menentukan benda yang harus dipandang. Kemudian kita tentukan seluruh gaya yang bekerja *pada* benda tersebut, dan kita buat sebuah gambar terpisah yang hanya menunjukkan benda yang kita pandang, dan gaya-gaya yang bekerja pada benda tersebut. Gambar ini disebut *diagram gaya benda-bebas*. Kemudian kita ambil sumbu koordinat yang baik, dan gunakan hukum kedua Newton untuk semua komponen gaya dan percepatan.
Contoh-contoh berikut menunjukkan bagaimana kita menggunakan hukum II Newton. *Setiap benda dianggap sebagai benda titik, atau sebuah partikel dengan massa tertentu, dan seluruh gaya yang bekerja pada benda tersebut dianggap bekerja pada satu titik.* Percepatan gravitasi diambil sama dengan 9,80 m/det^2 atau 32,0 ft/det^2, kecuali bila diberikan lain. Tali dan katrol dianggap tidak bermassa.

Contoh 2-3
Kita ingin menganalisa gerak sebuah balok pada bidang miring seperti ditunjukkan pada Gb. 2-8.



GB. 2-8 (A) SEBUAH BALOK TERLETAK PADA BIDANG MIRING, DITAHAN DENGAN SEUTAS TALI
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS YANG MELUKISKAN SELURUH GAYA YANG BEKERJA PADA BALOK

Sebuah balok terletak diam di atas sebuah bidang miring. Balok ini terikat pada tali seperti pada gambar. Bidang miring membuat sudut Θ dengan bidang horizontal. Gaya-gaya yang bekerja pada balok ditunjukkan pada Gb. 2-8. Gaya $\vec{F}_1$ adalah gaya oleh tali *pada* balok; m $\vec{g}$ adalah gaya tarik bumi pada balok, yaitu berat balok, dan $\vec{F}_2$ adalah gaya oleh permukaan bidang miring pada balok.
Gaya F_2 disebut *gaya normal*, dan mempunyai arah tegaklurus bidang. Karena di sini dianggap tidak ada gesekan, maka gaya normal ini adalah satu-satunya gaya oleh bidang pada balok. Jika ada gesekan, maka pada benda akan bekerja suatu gaya lagi, yaitu sejajar dengan permukaan bidang. Dalam hal ini gaya oleh bidang pada balok adalah

jumlah vektor gaya normal dan gaya gesekan, sehingga gaya oleh bidang pada balok tidak mempunyai arah tegaklurus bidang lagi. Karena kita ingin menganalisa gerak balok, kita hanya memandang gaya yang bekerja pada balok saja. Harap diperhatikan bahwa balok sendiri melakukan gaya pada benda-benda yang lain (pada tali, lantai, dan bumi) sesuai dengan hukum ketiga Newton, akan tetapi gaya-gaya yang terakhir ini tidak diperlukan untuk menentukan gerak balok.
Sekarang misalnya Θ dan m diketahui , bagaimana kita menentukan $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$? Karena balok berada dalam keadaan diam, jadi tidak dipercepat, maka kita peroleh:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\,\vec{g} = 0$$

Agar persoalan menjadi lebih mudah, kita ambil sistem koordinat dengan sumbu-x pada bidang miring, dan sumbu-y tegaklurus bidang miring. Dengan pilihan sistem koordinat seperti ini, kita dapatkan bahwa komponen pada arah x memenuhi persamaan:

$$F_1 - mg \sin \Theta = 0$$

dan pada arah y:

$$F_2 - mg \cos \Theta = 0$$

Dari kedua persamaan di atas F_1 dan F_2 dapat ditentukan.
Misalkan sekarang tali penahan balok putus, maka gaya tarik F_1 oleh tali hilang. Gaya resultan pada balok tidak lagi sama dengan nol, sehingga balok akan memperoleh percepatan. Berapakah besar percepatan ini?
Dari hukum II Newton kita peroleh $F_x = ma_x$, dan $F_y = ma_y$.
Dari hubungan ini kita peroleh

$$F_2 - mg \cos \Theta = 0 = ma_y$$

$$- mg \sin \Theta = ma_x,$$

sehingga kita peroleh

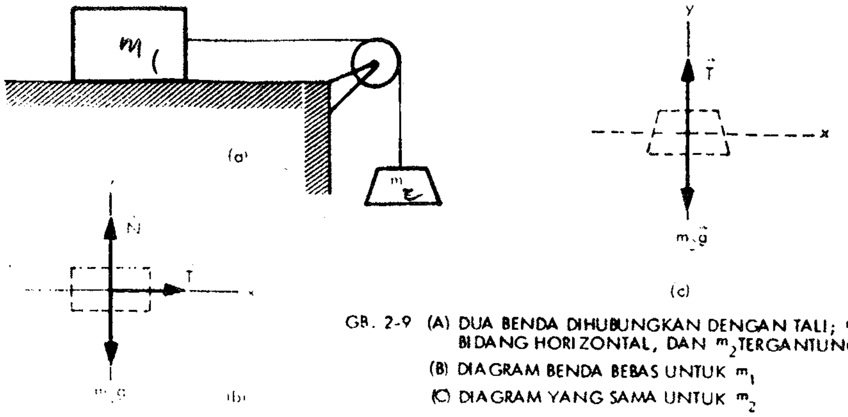
$$a_y = 0, \; a_x = -g \sin \Theta$$

Percepatan mempunyai arah ke bawah sepanjang bidang miring dan besar percepatan sama dengan g sin Θ.

Contoh 2-4
Sebuah balok dengan massa m_1 terletak pada suatu permukaan horizontal yang licin, dan ditarik dengan seutas tali yang dihubungkan dengan balok lain dengan massa m_2 melalui sebuah katrol. (Gb. 2-10).
Katrol dianggap tidak mempunyai massa dan gesekan, dan hanya berfungsi untuk membelokkan arah gaya tarik tali. Hitunglah percepatan sistem, dan gaya tarik pada tali.
Misalkan kita pandang lebih dahulu balok dengan massa m_1, dan kita selidiki geraknya. Gaya-gaya pada balok, dengan balok dianggap sebagai benda titik, ditunjukkan pada Gb. 2-9b.
Gaya $\vec{T}$, yaitu gaya tarik di dalam tali, menarik balok ke kanan ; sedang $m_1\vec{g}$ adalah gaya tarik oleh bumi, yaitu berat balok m_1. Gaya $\vec{N}$ adalah gaya normal oleh bidang datar *pada* balok. Balok hanya bergerak dalam arah -x, sehingga $a_y = 0$. Akibatnya dapat kita tuliskan:

$$N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 \tag{2-7}$$
$$T = m_1 a_{1x}$$

Dari persamaan di atas kita peroleh $N = m_1 g$. Kita belum tahu T sehingga kita belum dapat menghitung a_{1x}. Untuk menentukan gaya tegangan T kita harus memandang gerak benda m_2 yang tergantung pada tali. Gaya-gaya yang bekerja pada m_2 ditunjukkan pada Gb. 2-9c. Karena benda m_2 bergerak dipercepat, maka kita tidak dapat menganggap T sama dengan $m_2 g$.



GB. 2-9 (A) DUA BENDA DIHUBUNGKAN DENGAN TALI; m_1 TERLETAK DI ATAS BIDANG HORIZONTAL, DAN m_2 TERGANTUNG PADA TALI.
(B) DIAGRAM BENDA BEBAS UNTUK m_1
(C) DIAGRAM YANG SAMA UNTUK m_2

Persamaan gerak dari benda m_2 adalah:

$$m_2 g - T = a_{2y} \tag{2-8}$$

Karena panjang tali adalah tetap, maka balok m_1 dan benda m_2 mempunyai kecepatan sama, jadi juga mempunyai percepatan sama, hingga

$$a_{2y} = a_{1x}$$

dan percepatan sistem dapat kita tulis sebagai a. Dari persamaan (2-7) dan persamaan (2-8) kita peroleh

$$m_2 g - T = m_2 a$$
$$T = m_1 a \tag{2-9}$$

Akibatnya kita dapatkan

$$m_2 g = (m_1 + m_2)\, a$$

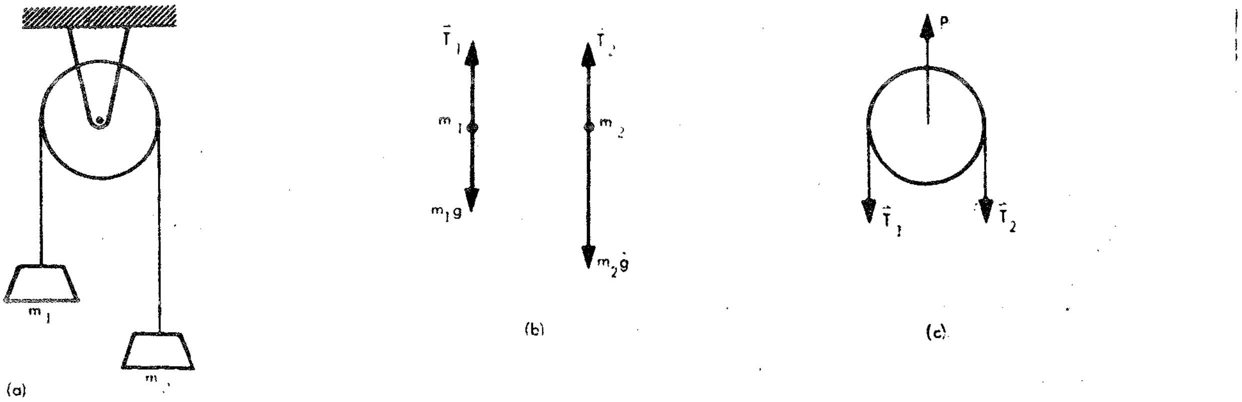
$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g \tag{2-10}$$

yang memberikan percepatan sistem, a, dan gaya tarik T.

Contoh 2-5

Pandang dua massa yang tidak sama besar, dan dihubungkan dengan seutas tali melalui sebuah katrol (Gb. 2-10). Misalkan m_2 lebih besar dari m_1. Hitung gaya tegangan pada tali dan percepatan kedua benda tersebut. Untuk memecahkan persoalan ini, mari kita ambil arah *ke atas* sebagai arah *positif*. Jika percepatan benda m_1 adalah a, maka benda m_2 mempu-



GB. 2-10 (A) DUA MASSA YANG TAK SAMA BESAR DIGANTUNGKAN DENGAN TALI PADA SEBUAH KATROL

(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK m_1 DAN m_2

(C) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK KATROL, DIANGGAP MEMPUNYAI MASSA SAMA DENGAN NOL

nyai percepatan -a. Gaya-gaya yang bekerja pada m_1 dan m_2 ditunjukka pada Gb. 2-10b, dimana T menyatakan gaya tarik oleh tali.
Persamaan gerak untuk m_1 adalah:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

dan untuk m_2:

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a$$

(Ingat perjanjian kita, arah ke atas diambil positif).
Karena massa tali dari massa katrol diabaikan (= 0), maka $T_1 = T_2 = T$
Dari kedua persamaan ini

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Jika misalnya $m_1 = 2{,}0$ slug, dan $m_2 = 1{,}0$ slug, maka

$$a = g/3 = (32/3{,}0)\ \text{ft/det}^2$$

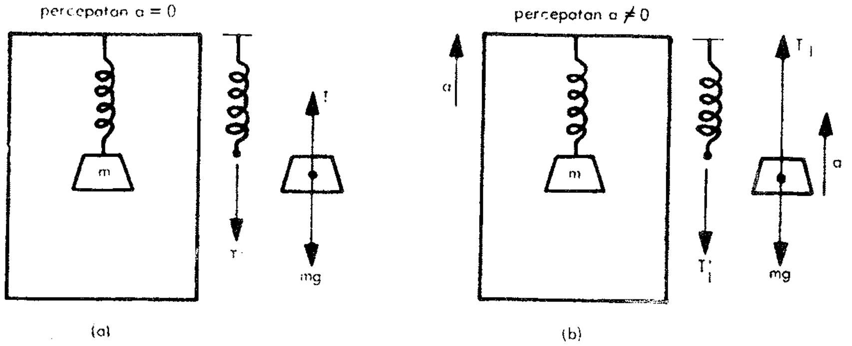
$$T = (\tfrac{3}{4})(32)\ \text{slug-ft/det}^2 = 43\ \text{lb.}$$

Gambar 2-10c menunjukkan gaya-gaya yang bekerja pada katrol tanpa mass: Jika kita anggap katrol sebagai benda titik atau partikel, maka selurul gaya yang bekerja pada katrol dapat dianggap bekerja pada titik pusat katrol. Gaya P adalah tarikan ke atas pada katrol oleh pemegang, dan T adalah tarikan ke bawah dari kedua buah tali.
Karena katrol berada dalam keadaan diam, maka

$$P = T + T = 2T$$

Jika massa katrol tak dapat diabaikan, maka berat katrol, yaitu mg, harus dimasukkan pada persamaan di atas. Di samping itu gerak rotasi katrol juga harus diperhitungkan sehingga T_1 tidak lagi sama dengan T_2. Hal ini akan kita bahas dalam Bab 5.

Contoh 2-6
Sebuah benda diukur beratnya dengan timbangan pegas dalam suatu elevator. Bila elevator diam, berat benda terbaca 20 newton, jika elevator bergerak dipercepat ke atas dengan kecepatan 5 m/det^2 berapakah harga terbaca pada skala timbangan? Bagaimana jika elevator bergerak dipercepat ke bawah dengan percepatan yang sama? Kita anggap percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.
Untuk memecahkan persoalan ini perhatikan Gb. 2-11.



GB 2-11 (A) SISTEM TIDAK DIPERCEPAT, GAYA TARIK $T = mg$
(B) SISTEM DIPERCEPAT, GAYA TARIK $T_1 \neq mg$

Dalam mengukur berat dengan timbangan pegas, kita harus sadar bahwa angka yang terbaca pada timbangan pegas menyatakan *gaya tarik* yang bekerja pada pegas.
Jika sistem ada dalam keadaan diam, gaya tarik T = mg; jadi gaya tarik pada pegas T_1, yaitu reaksi gaya T_1 adalah sama dengan berat benda mg. Jadi dapat disimpulkan bahwa berat benda mg = 20 newton. Karena percepatan gravitasi g = 10 m/det^2; maka massa m = 20 kg.
Bila elevator bergerak ke atas dengan percepatan 5 m/det^2, benda ini juga akan bergerak dengan percepatan yang sama. Hal ini berarti resultan yang gaya pada arah vertikal tidak lagi sama dengan nol.
Ini terjadi bila gaya tarik oleh pegas berubah harganya, dan gaya resultan pada benda menjadi

$$\Sigma F_y = T_1 - mg$$

Dari hukum II Newton kita peroleh

$$\Sigma F_y = T_1 - mg = ma$$

atau

$$T_1 = mg + ma$$
$$= m\,(g + a) = (2\text{ kg})\ (10 + 5)\text{ m/det}^2 = 30\text{ newton.}$$

Gaya tarik pada pegas T_1 = 30 newton (arah ke bawah). Jadi gaya berat benda yang terbaca pada timbangan adalah 30 newton.
Coba hitunglah berapa harga berat yang terbaca bila benda bergerak dipercepat ke bawah dengan percepatan seperti di atas.

2.7 GAYA GESEKAN

Sebuah buku yang diluncurkan di atas suatu lantai rata dan horizontal lajunya akan berkurang, dan akhirnya berhenti. Jelas bahwa suatu gaya dalam arah horizontal bekerja pada buku, yang arahnya berlawanan dengan gerak buku. Gaya ini adalah *gaya gesekan* yang bekerja pada buku, dan disebabkan oleh lantai.

Gaya gesekan ini terjadi jika dua buah benda bergesekan, yaitu permukaan kedua benda bersinggungan waktu benda yang satu bergerak terhadap benda yang lain. Benda yang satu melakukan gaya pada benda yang lain sejajar dengan permukaan singgung, dan dengan arah berlawanan terhadap gerak benda yang lain. Gaya-gaya gesekan selalu melawan gerak. Bahkan meskipun tidak ada gerak relatif antara dua benda yang bersinggungan, gaya gesekan dapat juga terjadi.

Pandang sebuah balok yang terletak di atas sebuah meja. Kita pasang sebuah pegas pada balok tersebut dan kita ukur gaya yang diperlukan untuk menggerakkan balok tersebut. Kita dapatkan bahwa pada harga gaya yang kecil balok tidak bergerak. Jelas bahwa gaya yang kita lakukan pada balok lewat pegas diimbangi oleh gaya gesekan pada balok, yang dilakukan oleh permukaan meja. Jika gaya tarik terus kita perbesar, kita dapatkan satu harga gaya tertentu yang membuat balok mulai bergerak. Sekali gerak balok dimulai, gaya ini akan menghasilkan gerak dipercepat. Dengan mengurangi gaya tegangan, kita dapat membuat agar balok bergerak lurus beraturan tanpa percepatan;gaya ini mungkin kecil, akan tetapi tidak pernah sama dengan nol.

Gaya - Gaya gesekan yang bekerja antara dua permukaan *yang berada dalam keadaan diam* relatif satu dengan lainnya disebut *gaya-gaya gesekan statik*. Gaya gesekan statik yang maksimum adalah gaya terkecil yang menyebabkan benda bergerak. Sekali benda mulai bergerak, gaya-gaya gesekan yang bekerja akan berkurang besarnya, sehingga untuk mempertahankan gerak lurus beraturan diperlukan gaya yang lebih kecil. Gaya-gaya yang bekerja antara dua permukaan *yang saling bergerak* relatif disebut *gaya-gaya gesekan kinetik.*

Untuk dua permukaan yang kering dan tidak diberi pelumas, didapatkan dari eksperimen bahwa gaya gesekan *statik* yang maksimum antara kedua permukaan ini tidak bergantung pada luas permukaan kontak yang saling bergesekan, akan tetapi sebanding dengan besarnya gaya normal antara kedua benda yang saling bergesekan.

Gaya normal ini adalah gaya tekan yang terjadi antara kedua permukaan singgung dari benda-benda yang bersangkutan. Jadi gaya gesekan statik f_s dihubungkan dengan gaya normal N oleh persamaan

$$f_s \leq \mu_s N, \qquad (2\text{-}11)$$

dimana konstanta pembanding μ_s disebut *koefisien gesekan statik.* Tanda sama-dengan pada persamaan (2-11) berlaku jika gaya gesekan statik mencapai besar maksimum.

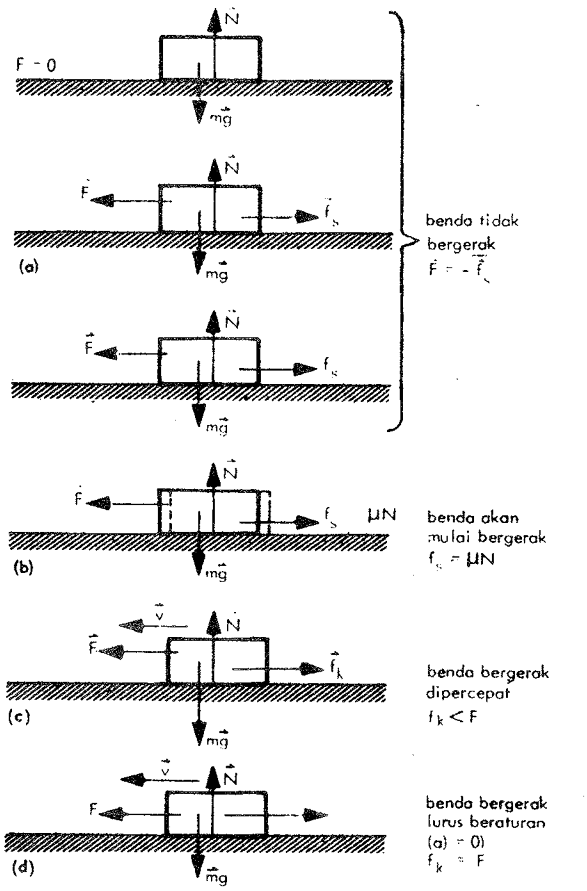
Untuk dua permukaan tertentu yang kering dan tanpa pelumas, didapatkan bahwa gaya gesekan *kinetik* tidak bergantung pada luas bidang kontak atau pada kecepatan relatif antara kedua permukaan yang bergerak satu terhadap lainnya. Besar gaya gesekan ini adalah sebanding dengan gaya normal pada kedua permukaan yang saling bersinggungan. Perbandingan antara besar gaya gesekan kinetik dengan besar gaya normal disebut *koefisien gesekan kinetik.* Jika f_k menyatakan besar gaya gesekan kinetik, dan N menyatakan besar gaya normal, kita dapat tuliskan

$$f_k = \mu_k N, \qquad (2\text{-}12)$$

dengan μ_k adalah koefisien gesekan kinetik. Konstanta-konstanta μ_s dan μ_k adalah besaran tanpa satuan. Untuk dua permukaan tertentu, biasanya

$\mu_s > \mu_k$

Harga μ_s dan μ_k bergantung pada sifat kedua permukaan gesek, dan harga ini besar jika kedua permukaan adalah kasar, dan kecil jika kedua permukaan ini licin. Harga μ_s dan μ_k dapat lebih besar dari satu, meskipun biasanya lebih kecil dari satu.
Perhatikan bahwa persamaan (2-11) dan (2-12) adalah hubungan antaraa *besar* gaya N dengan *besar* gaya f. Arah kedua gaya ini adalah saling tegak lurus sesamanya.
Gb. 2-12 menunjukkan apa yang terjadi waktu sebuah balok pada permukaan kasar akan bergerak sampai mulai bergerak karena pengaruh gaya tarik.



GB. 2-12 SEBUAH BALOK DITARIK OLEH GAYA $\vec{F}$ GAMBAR-GAMBAR A S/D D MENUNJUKKAN BAHWA SEBELUM BENDA BERGERAK GAYA $\vec{F}$ SELALU DIIMBANGI OLEH GAYA GESEKAN STATIK f_s. SETELAH BERGERAK GAYA GESEKAN YANG BEKERJA ADALAH: $f_k < f_s$

Tampak bahwa sebelum benda mulai bergerak gaya F diimbangi oleh gaya gesekan statik f_s. Jadi jika gaya F diperbesar terus, gaya gesekan statik f_s akan bertambah besar. Akan tetapi pada suatu saat, benda mulai bergerak. Tepat sebelum ini terjadi, gaya gesekan statik mencapai harga maksimum yang diberikan oleh $f_s = \mu_s N$. Setelah ini tercapai benda mulai bergerak, dan selanjutnya gaya gesekan yang berlaku adalah gaya gesekan kinetik f_k. Gaya ini selalu lebih kecil dari gaya gesekan statik f_s, dan besarnya sebanding dengan gaya normal N, jadi dapat dituliskan seperti pada persamaan (2-12). Kemudian untuk mempertahankan agar benda bergerak dengan kecepatan konstan, gaya F cukup sama dengan f_k. Jadi tiga hukum tentang gesekan menyatakan bahwa gaya antara dua benda yang bergesekan adalah:

(a) sebanding dengan gaya normal
(b) tidak tergantung pada luas persinggungan
(c) tidak bergantung pada kecepatan relatif.

Dua hukum yang pertama mula-mula dinyatakan oleh Leonardo de Vinci dan hukum yang ketiga dinyatakan oleh Fisikawan Perancis yaitu Charles A. Coulomb pada tahun 1785.

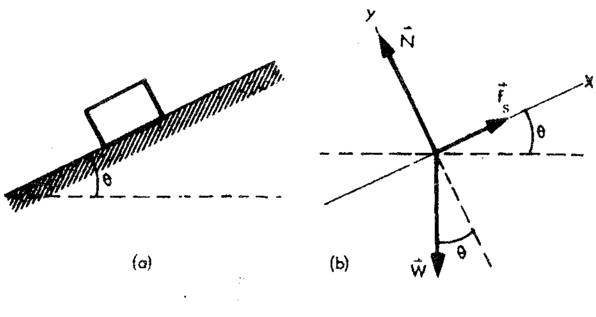
Karena pentingnya gesekan dalam mesin-mesin, peristiwa ini banyak diselidiki orang. Kebanyakan para ahli setuju dengan pendapat bahwa gesekan berasal dari kohesi antara molekul-molekul pada kedua permukaan yang bersinggungan. Ikatan kohesinya kadang-kadang demikian kuat sehingga bagian-bagian kecil lepas dan menempel pada permukaan

yang lain.
Sebetulnya dua permukaan hanya menyinggung satu dengan lainnya pada beberapa tempat yang menonjol keluar. Luas persinggungan mikroskopik yang sebenarnya adalah sangat berbeda dengan luas persinggungan makroskopik yang kelihatan mata. Dalam keadaan biasa, luas persinggungan sebenarnya adalah sebanding dengan beban, bertambah besar jika gaya normal bertambah. Karena gaya normal mudah diukur, sedang luas persinggungan sebenarnya sukar diukur, maka lebih mudah untuk menyatakan koefisien gesekan sebagai hasil bagi antara f dengan N. Jadi kedua hukum yang pertama tentang gesekan dianut orang sampai sekarang.
Hukum yang ketiga ternyata tidak selalu benar. Sebagai contoh, dalam Tabel 2-2 ditunjukkan koefisien gesekan kinetik antara baja dengan baja, tanpa pelumas, pada beberapa harga kecepatan relatif.

TABEL 2-2
Koefisien gesekan kinetik, baja dengan baja, tanpa pelumas

Laju m/det	0,0001	0,001	0,01	1	10	100
Koefisien gesekan kinetik μ_k	0,53	0,48	0,39	0,23	0,19	0,18

Perhatikan bahwa harga μ_k menurun jika laju bertambah besar. Dalam kenyataan praktis, kecepatan yang dibahas biasanya tidak berubah dalam jangkau yang terlalu besar, sehingga persamaan (2-12) tetap berlaku, dengan μ_k diambil harga rata-rata untuk daerah kecepatan yang dipergunakan.
Koefisien gesekan antara dua permukaan bergantung pada bermacam-macam variabel, seperti bahan yang dipergunakan, halus atau kasar permukaan, kelembaban, selaput permukaan, temperatur dan kebersihan permukaan. Jelas bahwa tidak ada teori gesekan yang eksak.
Hukum-hukum tentang gesekan adalah *hukum empirik*, yang tidak didasarkan pada teori tentang sebab-musabab gesekan, akan tetapi didasarkan hanya pada pengamatan. Meskipun begitu, hukum-hukum ini berlaku dengan baik.
Gerak suatu benda yang menggelinding di atas suatu permukaan dilawan oleh gaya yang timbul karena perubahan bentuk permukaan-permukaan yang bersinggungan. Gaya ini disebut gaya gesekan gelinding.
Gesekan antara permukaan-permukaan yang diberi pelumas, meskipun sulit, dapat dibahas secara teoritik dengan eksak.
Marilah kita bahas beberapa contoh pemakaian.



GB. 2-13 (A) SEBUAH BALOK TERLETAK DI ATAS SUATU BIDANG MIRING
(B) DIAGRAM GAYA BENDA - BEBAS UNTUK BALOK

Contoh 2-7

Sebuah balok diam pada sebuah bidang miring yang membuat sudut θ dengan horizontal, seperti pada Gb. 2-12. Jika sudut θ diperbesar, maka didapatkan bahwa benda mulai bergerak tergelincir pada sudut kemiringan θ_s. Berapakah koefisien gesekan statik antara balok dengan bidang miring ?

Gaya-gaya yang bekerja pada balok, yang dianggap sebagai benda titik atau partikel, ditunjukkan pada Gb. 2-13b. Gaya $\vec{W}$ adalah berat balok, gaya $\vec{N}$ adalah gaya normal pada balok oleh bidang miring, dan $\vec{f}_s$ adalah gaya gesekan statik pada arah tangensial (menyinggung bidang) pada balok oleh bidang miring. Perhatikan bahwa gaya resultan oleh bidang miring, yaitu $\vec{N} + \vec{f}_s$ tidak lagi tegak lurus permukaan kontak, seperti halnya jika permukaannya licin ($\vec{f}_s = 0$). Balok berada dalam keadaan diam, sehingga

$$\vec{N} + \vec{f}_s + \vec{W} = 0$$

Jika kita uraikan gaya-gaya ini dalam arah X dan Y, yaitu sejajar bidang dan tegak lurus bidang, kita peroleh

$$N - W\cos\Theta = 0$$
$$f_s - W\sin\Theta = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

Akan tetapi $f_s < \mu_s N$. Jika sudut bidang miring diperbesar sampai balok mulai bergerak ke bawah, maka pada sudut tersebut, yaitu $\Theta = \Theta_s$, kita dapat pergunakan $f_s = \mu_s N$.
Jika ini kita masukan dalam persamaan (2-13), kita peroleh:

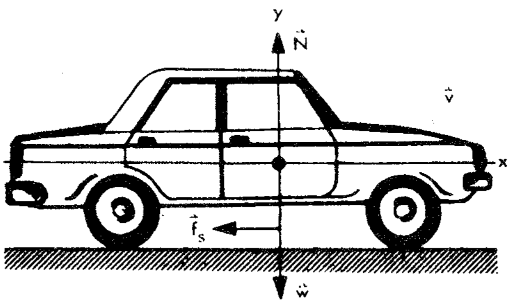
$$N = W\cos\Theta$$

$$\mu_s N = W\sin\Theta$$

sehingga

$$\mu_s = \mathrm{tg}\,\Theta_s$$

Contoh 2-8
Kita tinjau sebuah mobil yang sedang bergerak di atas suatu jalan lurus dan datar dengan kecepatan v_0. Jika gaya gesekan statik antara ban dan jalan adalah μ_s, tentukan jarak terdekat dalam mana mobil dapat dihentikan (Gb. 2-14).



GB. 2-14 GAYA-GAYA YANG BEKERJA PADA MOBIL YANG BERGERAK DIPERLAMBAT

Dari kinematika kita mempunyai hubungan antara kecepatan v, kecepatan awal v_0, percepatan a, dan jarak yang ditempuh x, yaitu:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

Jika kecepatan akhir $v = 0$, maka

$$x = -v_0^2/2a$$

dengan tanda minus berarti bahwa vektor percepatan $\vec{a}$ berlawanan dengan vektor kecepatan $\vec{v}$.
Untuk menentukan a kita pergunakan hukum II Newton pada komponen arah X, yaitu:

$$-f_s = ma = (W/g)a \qquad \text{atau} \qquad a = -g\,(f_s/W)$$

Dari komponen arah Y kita dapatkan bahwa

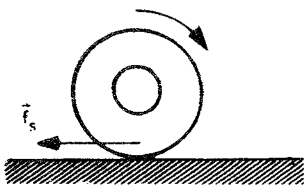
$$N - W = 0 \text{ atau } N = W$$

sehingga $\mu_s = f_s/N = f_s/W$ dan $a = -\mu_s g$

Jadi jarak yang ditempuh untuk berhenti adalah

$$x = -v_0^2/2a = v_0^2/(2g\mu_s)$$

Makin besar kecepatan awal, makin jauh jarak yang diperlukan untuk berhenti; jarak ini sebanding dengan kuadrat kecepatan awal.
Juga, makin besar koefisien gesekan statik makin pendek jarak henti yang harus ditempuh.
Di sini kita gunakan koefisien gesekan statik, dan tidak kita gunakan koefisien gesekan kinetik, sebab kita anggap bahwa mobil tidaklah tergelincir atau selip di permukaan jalan. Juga telah kita abaikan gesekan gelinding karena ban tidak betul-betul bulat.
Dalam gerak menggelinding tanpa slip, setiap bagian ban yang kontak dengan jalan ada dalam keadaan diam (lihat Gb. 2-15). Karena bagian ini bersinggungan dengan aspal, dan tidak ada slip, maka bagian ini mempunyai kecepatan sama dengan kecepatan aspal.

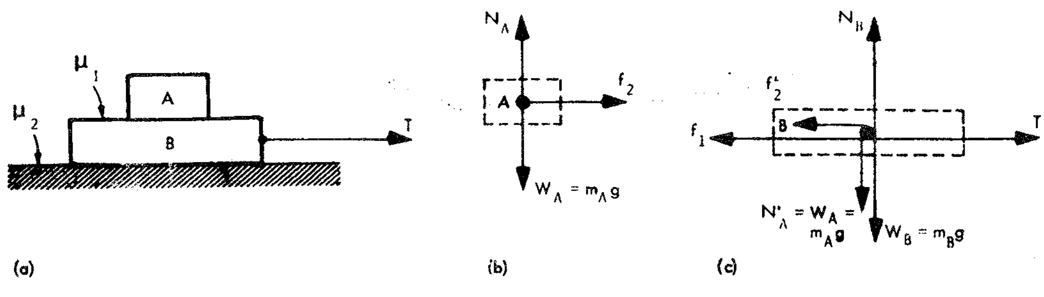


GB. 2-15 GAYA GESEKAN WAKTU BAN MENGGELINDING TANPA SLIP

Berarti kecepatan relatif dari permukaan yang bersinggung adalah nol.
Dalam persoalan ini mobil harus direm sedemikian rupa sehingga tidak terjadi slip. Jika jalan licin, dan rem ditekan penuh dengan mendadak, maka mungkin terjadi slip. Dalam hal ini kita harus pergunakan koefisien gesekan kinetik μ_k, dan jarak yang ditempuh untuk berhenti menjadi lebih besar karena $\mu_k < \mu_s$.

Perhatikan bahwa massa mobil tidak masuk dalam persamaan (2-14). Bagaimana anda dapat menerangkan praktek yang dilakukan orang dengan memberatkan beban mobil agar dapat berjalan pada jalan yang licin dengan lebih aman?

Contoh 2-8a
Dua buah benda A dan B ditumpuk seperti pada Gb. 2-16a.



GB. 2-16 (A) BENTUK DAN POSISI BENDA A DAN B PADA CONTOH 2-8
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK A
(C) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK B

Benda A bermassa 5 kg dan dapat bergerak di atas benda B yang bermassa 20 kg. Benda B ditarik dengan gaya T.
Bila koefisien gesekan kinetik antara B dengan lantai adalah 0,3, dan koefisien gesekan statik antara A dan B adalah 0,6, marilah kita tentukan
(a) besar gaya T agar benda A tepat akan tergeser di atas B
(b) besar gaya gesekan antara A dan B bila gaya T = 200 newton

Misalkan percepatan gravitasi $g = 10$ m/det^2.
Untuk memecahkan soal di atas, kita perlu membuat diagram gaya benda bebas untuk A dan B. Diagram gaya benda bebas untuk A ditunjukkan pada Gb. 2-16b.
Perhatikan bahwa gaya-gaya pada A dianggap bekerja pada satu titik. Ini karena benda A dan B masih kita anggap sebagai benda titik atau partikel. Dalam Bab 5 akan ditunjukkan bahwa jika benda tidak berupa benda titik, titik tangkap gaya-gaya pada benda tidaklah melalui satu titik.
Untuk membahas soal bagian (a), kita perhatikan Gb. 2-16 (b). Agar A bergerak bersama B pada A haruslah bekerja gaya arah gerak. Satu-satunya gaya pada arah ini adalah f_2, yaitu gaya gesekan antara A dan B. Gaya inilah yang membuat A bergerak. Jika permukaan atas B licin, sehingga $f_2 = 0$, maka A tidak akan bergerak bila B ditarik .
Jika kita gunakan hukum II Newton, kita akan peroleh

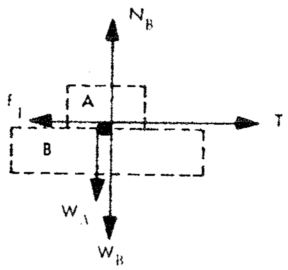
$$\Sigma F_x(A) = f_2 = m_A a$$

Karena A tepat akan tergeser di atas B maka gaya gesekan $f_2 = \mu_2 N_A$, dengan μ_2 koefisien gesekan *statik* antara A dan B, dan N_A gaya normal pada A oleh B.
Karena A tidak melakukan gerak dalam arah vertikal, gaya normal A sama besar dengan berat benda A.
Jadi $N_A = m_A g$, dan percepatan dapat kita hitung

$$a = \frac{\mu_2 N_A}{m_A} = \frac{\mu_2 m_A g}{m_A} = \mu_2 g$$

$$= (0{,}6)(10 \text{ m/det}^2) = 6 \text{ m/det}^2$$

Untuk menentukan harga gaya T agar A tepat akan tergeser terhadap B, kita dapat menggunakan dua cara. Cara pertama, kita pandang A dan B sebagai satu sistem, sedang cara kedua, kita hanya memandang gerak B saja. Marilah kita gunakan cara pertama. Pembaca dapat mencoba cara kedua sekedar untuk berlatih.



GB. 2-16 (D) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS DENGAN A DAN B DIANGGAP SEBAGAI SATU SISTEM

Cara pemecahan pertama dapat digunakan bila A dan B bergerak bersama. Perhatikan Gb. 2.16d. Benda A dan B dipandang sebagai satu sistem (suatu partikel) dengan semua gaya bekerja pada satu titik.
Gaya gesekan antara A dan B tidak muncul, karena jika dipandang sebagai satu sistem gaya gesekan f_2 pada A dan f_2 pada B saling meniadakan, karena aksi-reaksi.
Begitu juga halnya dengan pasangan gaya normal N_A dan N_A' (lihat Gb. 2-16b dan Gb. 2-16c).
Dari Gb 2-16 (d) dapat kita simpulkan hubungan berikut.

(1) ΣF_x (A dan B) $= T - f_1 = (m_A + M_B)\, a$ (Hukum II Newton)

(2) $f_1 = \mu_1 N_B$ (benda A dan B bergerak, μ_1 koefisien gesekan kinetik)

(3) $N_B = (m_A + m_B)\, g$ (sistem tak melakukan gerak pada arah vertikal)

(4) $a = 6$ m/det^2 (percepatan A)

Jadi gaya T dapat kita hitung dengan memasukkan m_A = 5 kg, m_B = 20 kg, μ_1 = 0,3

$$T = f_1 + (m_A + m_B)\ a$$

$$= \mu_1\ (m_A + m_B)\ g + (m_A + m_B)\ a$$

$$= (m_A + m_B)(\mu_1 g + a)$$

$$= (5 + 20)(kg)(0,3)(10) + 6)(m/det^2)$$

$$= (25)(a) \text{ newton}$$

$$= 225 \text{ newton}$$

Sekarang marilah kita bahas bagian (b) dari contoh soal ini. Karena yang diketahui adalah gaya tarik T, strategi pemecahan soal kita balik. Kita tentukan dahulu percepatan yaitu a, kemudian kita gunakan hukum II Newton pada A untuk menentukan f_2. Ingat bahwa dalam hal ini $f_2 \neq \mu_2 N_A$ karena gaya gesekan f_2 belum tumbuh menjadi f_2(maksimum) = $\mu_2 N_A$; benda A belum mulai tergeser di atas B. Karena A dan B bergerak bersama, kedua benda ini dapat kita pandang sebagai satu sistem.
Dengan penalaran yang sama, kita peroleh

$$T_1 = f_1 + (m_A + m_B)\ a$$

$$= \mu_1\ (m_A + m_B)\ g + (m_A + m_B)\ a$$

sehingga percepatan a dapat dihitung,

$$a = \frac{T - \mu_1\ (m_A + m_B)\ g}{m_A + m_B}$$

atau

$$= \frac{T}{(m_A + m_B)} - \mu_1\ g$$

$$= \frac{2\omega\ (\text{newton})}{(5) + 20)\ kg} - (0,3)(10\ m/det^2)$$

$$= 8\ m/det^2 - 3\ m/det^2 = 5\ m/det^2$$

Kemudian kita gunakan hukum II Newton pada benda A,

$$\Sigma\ f\ (A) = f_2 = m_A a$$

$$(5\ kg)(5\ m/det^2) = 25 \text{ newton}$$

2.8 GAYA SENTRIPETAL

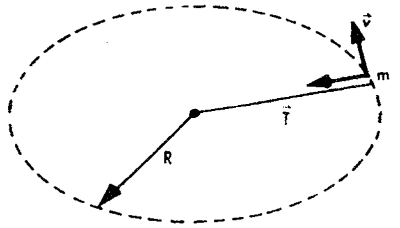
Sebuah benda yang bergerak lingkar dengan laju konstan mempunyai percepatan ke arah pusat lingkaran, atau pada arah sentripetal. Percepatan ini menyatakan perubahan *arah* vektor kecepatan, meskipun laju benda (yaitu besar vektor kecepatan) tidak berubah. Jika benda bergerak pada lingkaran berjejari r dengan laju v, maka dari bab 1 telah kita peroleh bahwa percepatan benda adalah

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r} \qquad (2\text{-}15)$$

dimana $\hat{r}$ menyatakan vektor satuan pada arah radial *keluar*. Tanda negatif pada persamaan (2-15) menyatakan bahwa arah percepatan sentripetal ini adalah menuju pusat lingkaran.
Jika benda tersebut di atas mempunyai massa m, maka menurut hukum II Newton agar benda memiliki percepatan tersebut, pada benda harus bekerja gaya sebesar:

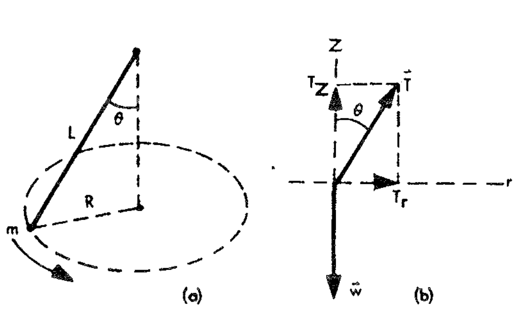
$$\vec{F} = m\,\vec{a} = -\frac{m\,v^2}{r}\,\hat{r} \qquad (2\text{-}16)$$

Gaya ini disebut *gaya sentripetal*, dan bekerja pada benda untuk membuat agar benda berbelok, atau berubah arah geraknya. Karena gaya sentripetal ini selalu tegak lurus pada vektor kecepatan benda, maka benda terus berbelok dan bergerak pada lingkaran, sedang besar vektor kecepatan (laju) tidak terpengaruh.
Untuk lebih jelas lagi, kita pandang sebuah batu yang kita ikat pada ujung seutas tali dengan panjang R, dan bergerak dalam bidang horizontal *gesekan* (lihat Gb. 2-17).



GB. 2-17 SEBUAH BATU BERGERAK DENGAN LAJU KONSTAN PADA LINGKARAN DALAM BIDANG HORIZONTAL. SATU-SATUNYA GAYA YANG BEKERJA DALAM BIDANG HORIZONTAL ADALAH T

Gaya sentripetal yang bekerja adalah gaya tarik T pada batu oleh tali. Gaya ini adalah gaya total yang bekerja pada batu dalam bidang horizontal. Gaya ini mempercepat batu dalam arti *merubah arah* kecepatan; besar vektor kecepatan pada gerak ini tidaklah berubah. Besar gaya sentripetal T ini adalah sama dengan $\frac{m\,v^2}{R}$, dan selalu mengarah pada paku mengikat tali, jadi pada titik pusat lingkaran gerak. Jika tali putus, maka gaya yang bekerja pada batu menjadi sama dengan nol; batu akan meneruskan geraknya pada garis lurus dengan kecepatan tetap sepanjang garis singgung lingkaran.



GB. 2-18 (A) SEBUAH MASSA m TERGANTUNG DENGAN SEUTAS TALI DENGAN PANJANG L BERAYUN MEMBENTUK LINGKARAN
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS

Contoh 2-9
Perhatikan Gb. 2-18. Sebuah benda kecil dengan massa m bergerak lingkar dengan laju konstan v pada ujung sebuah tali dengan panjang L. Pada waktu benda berputar tali membentuk sebuah kerucut.
Sistem ini dikatakan membentuk ayunan konik (kerucut). Tentukan waktu yang diperlukan untuk melakukan satu putaran.
Jika tali membuat sudut θ dengan ver-

tikal, maka jejari lingkaran gerak adalah $R = L \sin \Theta$. Gaya-gaya yang bekerja pada benda bermassa m, yaitu $\vec{W}$, dan gaya tegangan tali $\vec{T}$, ditunjukkan pada Gb. 2-18b.

Jelas bahwa jumlah vektor $\vec{T} + \vec{W} \neq 0$. Jadi gaya resultan yang bekerja pada benda tidak sama dengan nol, dan percepatan benda yang bergerak pada suatu lingkaran juga tidak sama dengan nol. Kita dapat menguraikan gaya T pada setiap saat atas komponen-komponen vertikal dan horizontal, yaitu

$T_r = T \sin \Theta$ dan $T_z = T \cos \Theta$

Karena benda tidak mempunyai percepatan dalam arah vertikal

$T_z - W = 0$ atau $T \cos \Theta - W = 0$ atau $T \cos \Theta = m\,g$

Percepatan pada arah radial adalah v^2/R. Percepatan ini dihasilkan oleh komponen radial dari gaya T, yaitu T_r, gaya sentripetal yang bekerja pada benda m. Jadi

$T_r = T \sin \Theta = mv^2/R$

Jika persamaan ini dibagi dengan persamaan di atas kita akan peroleh:

$\mathrm{tg}\,\Theta = v^2/Rg$ atau $v^2 = Rg\ \mathrm{tg}\,\Theta$

yang memberikan laju yang konstan dari benda.
Jika waktu untuk satu putaran penuh kita nyatakan dengan τ, maka

$v = \dfrac{2\pi R}{\tau} = \sqrt{Rg\ \mathrm{tg}\Theta}$ atau $\tau = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi R}{(Rg\ \mathrm{tg}\ \Theta)^{\frac{1}{2}}}$ $\tau = 2\pi \sqrt{R/g\ \mathrm{tg}\Theta}$

Akan tetapi $R = L \sin \Theta$, maka

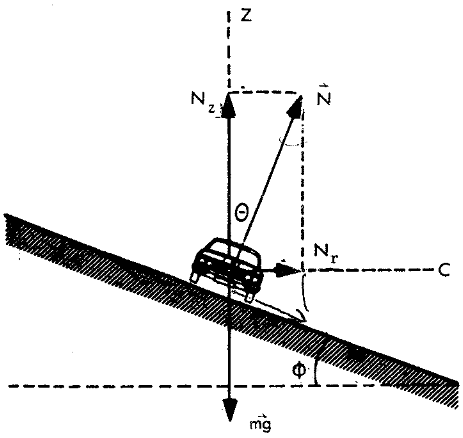
$\tau = 2\pi \sqrt{(L \cos \Theta)/g}$

Persamaan ini memberikan hubungan antara τ, L, dan Θ. Perhatikan bahwa τ, yang disebut perioda gerak, tidak bergantung pada m.
Jika $L = 1\text{m}$ dan $\Theta = 30^\circ$, maka perioda gerak adalah

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{(1\text{m})(0{,}866)}{(9{,}8\text{m/det}^2)}} = 1{,}8 \text{ detik.}$$

Contoh 2.10.
Sebuah tikungan jalan raya dirancang untuk lalu lintas dengan kecepatan 60 km/jam.
(a) Jika jejari tikungan adalah 150 meter, sedang permukaan jalan licin, berapakah harusnya kemiringan jalan?
(b) Jika tikungan tidak miring, berapakah koefisien gesekan minumam antara roda dan jalan agar kendaraan tidak tergelincir (slip)

Dalam menghadapi persoalan seperti ini, kita harus dapat menentukan gaya mana bertindak sebagai gaya sentripetal. Gaya ini haruslah dalam bidang lingkaran gerak dan selalu menuju pusat lingkaran.
Pada waktu menikung mobil dapat kita anggap bergerak di dalam suatu bidang horizontal, sehingga pusat lingkaran gerak haruslah berada dalam bidang ini. Keadaan pada saat mobil menikung dilukiskan pada Gb. 2-19.



GB. 2-19 MOBIL SEDANG MENIKUNG, MEMBUAT LINGKARAN BERPUSAT PADA C DALAM BIDANG HORIZONTAL. GAYA GESEKAN DIABAIKAN

Karena mobil bergerak dalam bidang horizontal, maka komponen dalam arah vertikal

$N_z = N \cos \Theta = m\ g.$

Komponen dalam bidang horizontal adalah gaya sentripetal yang membuat arah gerak mobil berubah waktu membelok, komponen dalam arah horizontal ini selalu menuju pusat, dan merupakan gaya sentripetal dalam persoalan ini. Jadi

$$N_r = N \sin \Theta = \frac{m\ v^2}{R}$$

Dalam persoalan ini gesekan dengan jalan diabaikan.

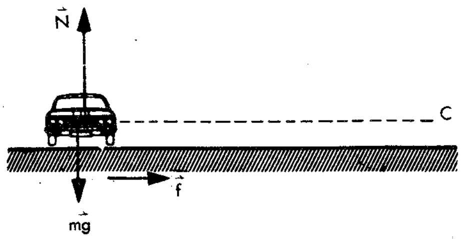
Dari kedua persamaan di atas kita peroleh:

$$\text{tg } \Theta = \frac{v^2}{Rg}$$

untuk $v = 60$ km/jam $= \dfrac{60.000 \text{ m}}{3600 \text{ detik}} = 16{,}7$ m/det, dan $R = 150$ m, sedang $g = 9{,}8$ m/det, kita peroleh

$$\text{tg } \Theta = (16{,}7)^2/(150 \times 9{,}8) = 0{,}190 \quad \text{dan sudut} \quad \Theta = 11^\circ$$

Dalam bagian (b) dari persoalan kita, bidang jalan tidaklah miring, akan tetapi ada gesekan antara ban mobil dengan jalan. Untuk jelasnya kita lukiskan keadaan ini pada Gb. 2-20. Tampak bahwa karena mobil



GB. 2-20 MOBIL SEDANG MENIKUNG PADA TIKUNGAN YANG HORIZONTAL. GAYA GESEKAN MERUPAKAN GAYA SENTRIPETAL YANG MERUBAH ARAH GERAK MOBIL

hanya bergerak dalam bidang horizontal, maka

$N = m\ g$

Gaya gesekan f antara ban mobil dan jalan mempunyai arah menuju pusat belokan. Jadi gaya f ini merupakan gaya sentripetal yang merubah arah gerak mobil.

Jadi agar mobil tidak slip, haruslah

$f = \mu N = mv^2/R \quad$ atau $\quad \mu(mg) = m\ v^2/R,$

sehingga

$\mu = v^2/Rg$

Jika kita masukkan $v = 60$ km/jam $= 16{,}7$ m/det, $R = 150$ m, dan $g = 9.80$ m/det^2, kita peroleh $\mu = 0.190$

2.9 GAYA GRAVITASI

Sampai abad ke-17 orang menganggap bahwa sebuah benda jatuh ke bumi adalah disebabkan oleh sifat hakiki benda, dan tidak perlu penjelasan

lebih lanjut. Bahwa benda jatuh ke bumi karena ditarik oleh bumi adalah pikiran yang timbul pada diri Newton dan beberapa orang sejamannya. Pada waktu itu gerak planet dan benda angkasa pada umumnya, merupakan bahan pembicaraan yang hangat, terutama di kalangan mahasiswa di Cambridge pada tahun 1664. Pada tahun 1665 suatu wabah berjangkit, dan sekolah libur. Di rumahnya Isaac Newton terus memikirkan persoalan di atas. Tampaknya sebuah apel yang jatuh dari pohon memberi inspirasi pada Newton, bahwa gaya yang bekerja pada apel dan gaya yang bekerja pada bulan yang bergerak mengelilingi bumi, adalah gaya yang sama.
Newton berpikir bahwa percepatan sentripetal yang dimiliki oleh bulan dalam lintasannya mengelilingi bumi mungkin mempunyai sebab yang sama dengan percepatan yang dialami oleh benda yang jatuh ke permukaan bumi. Pemikiran yang menganggap bahwa gerak ruang angkasa dan gerak permukaan bumi diatur oleh hukum-hukum yang sama adalah suatu perubahan terhadap tradisi berpikir pada waktu itu.
Percepatan sentripetal bulan dapat dihitung dari periode putarannya mengelilingi bumi. Nilai ini adalah kira-kira 1/3600 kali percepatan gravitasi g, yaitu percepatan benda di permukaan bumi karena gaya tarik bumi. Newton mencoba untuk menerangkan perbedaan kedua percepatan di atas dengan menyatakan bahwa percepatan benda karena gaya tarik bumi berbanding terbalik dengan kuadrat jarak benda dari bumi. Newton menganggap bahwa pada persoalan ini semua massa bumi terkumpul pada sebuah titik di pusat bumi. Sehingga yang dimaksud dengan jarak bumi adalah jarak ke pusat bumi. Sebetulnya tidaklah jelas bagaimana kita dapat menganggap bahwa dalam interaksi antara sebuah batu dan bumi, kita dapat menganggap bumi sebagai benda titik. Newton melakukan perhitungan ini pada tahun 1666, akan tetapi hasilnya baru diumumkan pada tahun 1687, yaitu dengan diterbitkannya buku *Principia Mathematica*.
Sebelum dapat membuktikan ini, Newton perlu menciptakan kalkulus lebih dahulu.
Pengamatan Tycho Brahe (1546-1601), dan kesimpulan Johannes Kepler (1571-1630) mendukung penemuan Newton ini. Perhatikan bahwa kedua orang di atas adalah dari generasi sebelum Newton [Newton lahir pada tahun (1642)].

Hukum Gravitasi
Gaya antara dua partikel yang mempunyai massa m_1 dan m_2 dan terpisah oleh jarak r adalah suatu gaya tarik menarik sepanjang garis yang menghubungkan kedua partikel tersebut dan mempunyai besar

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (2\text{-}17)$$

dimana G adalah tetapan gravitasi, mempunyai nilai sama untuk setiap pasangan partikel. Secara vektor hukum ini dapat ditulis sebagai

$$\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} \qquad (2\text{-}17b)$$

dengan $\hat{r}_{12}$ adalah vektor satuan dari m_1 ke m_2.
Inilah hukum *gravitasi* dari Newton.
Nilai G dapat ditentukan dengan eksperimen, dan diperoleh nilai

$G = 6{,}673 \times 10^{-11}$ N m^2 / kg^2

Persamaan (2-17) menunjukkan bahwa massa yang dahulu kita definisikan untuk menyatakan sifat inersia, ternyata juga merupakan sifat benda yang menyebabkan gaya tarik menarik antara dua benda bermassa. Jadi massa bersifat seperti muatan listrik dengan mana dua benda bermuatan dapat saling berinteraksi. Mungkin anda bertanya mungkinkah massa yang dipergunakan pada persamaan (2-17) berlainan dengan massa yang dipergunakan pada hukum II Newton, yaitu yang menyatakan sifat inersia benda? Untuk membedakan kedua macam massa ini orang menamakan massa yang dipergunakan pada persamaan (2-17) sebagai massa *gravitasi* dan massa yang menyatakan sifat inersia sebagai *massa inersial.*
Dari eksperimen sudah dibuktikan bahwa dua benda dengan massa gravitasi yang sama jatuh bebas dengan percepatan yang sama, sehingga kedua benda ini mempunyai massa inersial yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa massa gravitasi adalah sebanding dengan massa inersial, bahkan tampaknya kedua macam massa ini adalah identik, yaitu merupakan besaran yang sama. Newton membuat sebuah eksperimen yang membuktikan hal ini, dan sampai pada kesimpulan bahwa *massa inersial memang sama dengan massa gravitasi.*

Perubahan percepatan gravitasi dengan ketinggian
Sampai sekarang kita selalu menganggap bahwa percepatan gravitasi g adalah suatu tetapan. Jika pada persamaan (2-17) m_1 kita ambil sebagai massa bumi M_B, dan m_2 kita ambil sebagai massa benda m, maka gaya tarik oleh bumi pada benda adalah

$$F = G\frac{M_B m}{r^2} \qquad (2.18)$$

dimana r adalah jarak benda ke pusat bumi. Gaya tarik ini tidak lain adalah *berat* benda. Sebagai reaksi terhadap berat benda, maka bumi ditarik oleh benda dengan gaya yang sama. Karena massa bumi begitu besar, maka percepatan yang dialami tidaklah seberapa.
Menurut hukum II Newton, gaya tarik bumi akan menyebabkan percepatan g menurut hubungan
$F = m\,g$
Sehingga percepatan gravitasi g dapat kita tuliskan sebagai

$$g = \frac{G\,M_B}{r^2} \qquad (2\text{-}18)$$

jejari bumi mempunyai nilai 6371 km, sehingga jika kita ingin menentukan perubahan percepatan gravitasi sampai ketinggian 20 km misalnya, kita tidak mengharapkan banyak perubahan pada nilai g.
Perubahan g ini dapat kita tentukan sebagai berikut. Misalkan perubahan ketinggian ini kita nyatakan sebagai dr, yaitu perubahan kecil pada jarak ke pusat bumi. Jika jarak r berubah dengan dr, maka kita dapat menghitung perubahan yang terjadi pada g dari persamaan (2-18).

$$dg = -\frac{2\,GM_B}{r^3}\,dr$$

$$= -2\frac{g}{r}\,dr \qquad \text{atau} \qquad \frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r} \qquad (2\text{-}19)$$

Tanda negatif di sebelah kanan persamaan (2-19) menyatakan bahwa jika jarak bertambah dr, percepatan gravitasi g *berkurang* sebesar dg. Misalkan kita ingin menghitung berapa besar g berubah jika kita berpindah dari permukaan laut (r = 6371 km) sampai ketinggian 20 km (r = 6391 km), maka g akan berubah sebesar

$$\frac{dg}{g} = 2\frac{dr}{r} = \frac{2 \times 20}{6371} \times 100\% = 0,63\%$$

Karena bumi tidak benar-benar berupa bola, harga g di permukaan laut bergantung pada lintang tempat di bumi. Di katulistiwa yaitu untuk lintang 0°, harga g adalah 9,75039 m/det^2, dan pada lintang 60° harga g adalah 9,81918 m/det^2.

Harga-harga di atas hanyalah rata-rata harga g. Harga g masih berubah dari satu tempat ke tempat lain pada lintang yang sama, karena sifat lapisan-lapisan bumi.

Perbedaan harga g ini dipergunakan dalam eksplorasi bahan galian bumi.

2.10 GAYA FIKTIF

Kemungkinan besar anda pernah mengalami hal ini. Jika anda sedang duduk dalam kereta api, dan tiba-tiba kereta bergerak maju, anda merasa ada gaya yang mendorong bagian atas badan anda ke belakang. Mungkin anda merasa aneh. Anda duduk sendiri, tidak ada orang lain yang mendorong anda, tetapi anda merasa ada dorongan. Untuk lebih terasa aneh, tutuplah jendela-jendela sehingga anda tidak dapat melihat apa yang terjadi di luar kereta. Jika anda perhatikan benda-benda yang ada di dalam kereta, anda merasa tidak bergerak di dalam kereta api; tidak ada percepatan, tetapi terasa ada gaya dorongan. Mungkinkah hukum II Newton tidak berlaku di sini?

Untuk lebih jelas misalkan anda lakukan suatu eksperimen. Ambillah suatu benda yang kecil, misalnya sebuah tutup gelas, dan taruh dilantai lantai kereta. Pada waktu kereta tiba-tiba bergerak ke depan, tutup gelas ini akan bergeser ke belakang. Anda tahu bahwa lantai tidak bergerak (jangan menengok ke luar jendela), dan pada benda (tutup gelas) hanya ada gaya berat dan gaya normal. Jadi tidak ada gaya dalam bidang horizontal, toh tutup gelas tadi tetap bergerak ke belakang. Tanpa ada gaya, terjadi percepatan. Jelas bahwa ini melanggar hukum Newton II.

Seorang teman berdiri di luar kereta api tidak merasa keanehan ini. Dipandang dari dia, waktu kereta tiba-tiba bergerak ke depan, bagian atas badan anda masih terasa diam, akan tetapi bagian bawah yang menekan kursi sudah bergerak ke depan, akibatnya bagian badan sebelah atas ketinggalan. Anda merasakan ini sebagai suatu dorongan ke belakang.

Begitu juga halnya dengan tutup gelas yang ada di lantai. Pada tutup gelas hanya ada gaya-gaya dalam arah vertikal, dan dalam bidang horizontal tidak ada gaya. Menurut dia tutup gelas ini akan tetap diam relatif terhadap tanah. Jika kereta tiba-tiba maju ke depan, maka tutup gelas akan tertinggal. Anda melihat tutup gelas bergerak ke belakang.

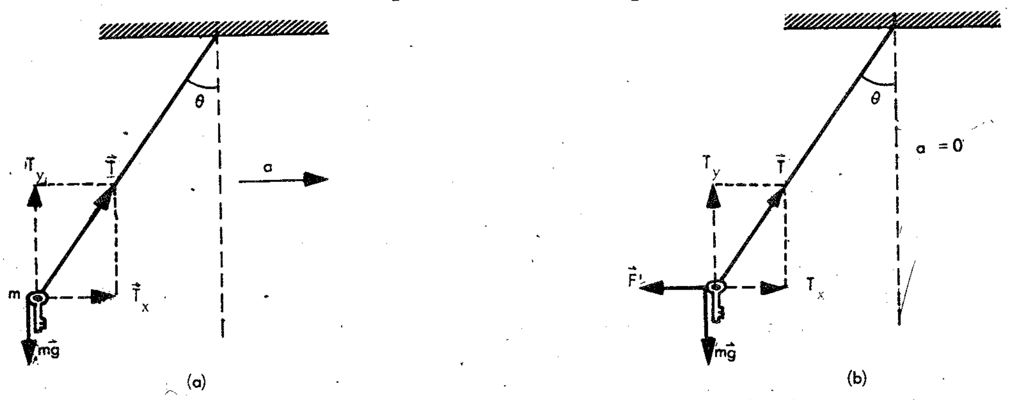
Setelah kereta berjalan dengan laju konstan, anda dapatkan bahwa keanehan-keanehan di atas tidak terjadi lagi. Anda tidak lagi merasa ada dorongan, dan benda-benda ringan di lantai juga tidak bergerak. Kelihatannya hukum II Newton mulai berlaku lagi.

Memang jika dipandang dari sistem koordinat yang diam atau bergerak dengan kecepatan tetap, hukum II.Newton berlaku penuh. Sistem koordinat semacam ini disebut *kerangka inersial*. Kereta api yang tiba-tiba bergerak, adalah bergerak dipercepat, dan berlaku sebagai *kerangka tak inersial*. Dalam kerangka tak inersial hukum II Newton tidak berlaku lagi.

Mungkin sekali anda sudah terlalu terbiasa dengan hukum II Newton, dan menyatakan bahwa hukum II Newton harus tetap berlaku dalam kerangka yang dipercepat. Maka anda harus menganggap bahwa pada tutup gelas yang bergerak ke belakang (waktu kereta tiba-tiba bergerak ke depan) harus bekerja gaya. Gaya ini bekerja selama kereta bergerak dipercepat. Gaya ini, yang sebetulnya tidak ada, disebut *gaya fiktif* atau *gaya semu;* dikatakan semu sebab tidak jelas apa atau siapa yang melakukan gaya ini.

Suatu contoh lagi. Misalkan anda mengendarai sebuah mobil, dan anda gantungkan sebuah kunci dengan benang pada langit-langit mobil.

Jika sekarang pedal gas ditekan sehingga mobil bergerak dipercepat, maka tali akan membuat sudut seperti terlihat pada Gb. 2-21.



GB. 2-21 (A) KUNCI YANG DIGANTUNG DENGAN TALI DALAM MOBIL YANG DIPERCEPAT DIPANDANG DARI KERANGKA INERSIA (TANAH)

(B) KUNCI YANG DIGANTUNG DENGAN TALI DALAM MOBIL YANG DIPERCEPAT DILIHAT DARI DALAM MOBIL. GAYA $\vec{F}'$ ADALAH GAYA FIKTIF

Gb. 2-21a menunjukkan keadaan jika dilihat oleh orang yang berdiri di tanah. Karena benda m bergerak dipercepat bersama mobil maka pada arah X komponen gaya resultan tidak sama dengan nol. Dari hukum II Newton jelas bahwa

$$T_x = m\, a$$

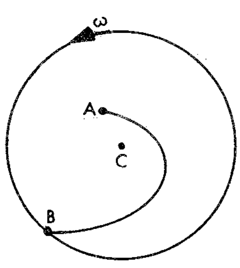
dimana a adalah percepatan benda.

Pada Gb. 2-21b ditunjukkan keadaan gaya-gaya pada benda jika dilihat oleh anda yang duduk di mobil. Oleh anda benda m akan nampak diam, sehingga jika anda ingin mempertahankan hukum Newton di dalam mobil yang dipercepat, maka anda harus menganggap adanya gaya fiktif F' yang mengimbangi T agar resultan gaya adalah sama dengan nol, karena percepatan benda terhadap anda sama dengan nol.

Jika anda melihat keluar jendela, maka tampak bahwa waktu mobil berhenti atau bergerak lurus dengan kecepatan tetap sudut Θ adalah sama dengan nol, atau gaya fiktif $\vec{F}'$ juga sama dengan nol. Dapat ditunjukkan bahwa dalam kerangka acuan yang bergerak lurus dengan percepatan tetap a, maka gaya fiktif F' mempunyai nilai

$$\vec{F}' = -m\,\vec{a}$$

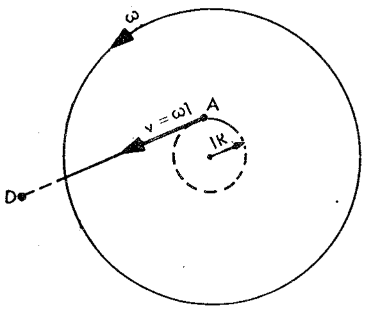
Sekarang marilah kita bahas kerangka acuan tak inersial yang berputar dengan kecepatan sudut tetap. Untuk dapat melihat persoalannya, bayangkan anda berdiri di pusat sebuah meja yang berputar.
Anda letakkan sebuah benda yang dapat bergerak tanpa gesekan, misalnya sebuah cupu es berisi es kering, seperti yang telah kita bicarakan di depan. Karena gerak putar adalah gerak dipercepat, maka meja yang berputar ini merupakan suatu kerangka acuan yang tak inersial.
Di sini kita juga akan menemukan keanehan pada Hukum II Newton, dan kita perlu untuk mendefinisikan gaya-gaya fiktif seperti dalam mobil atau kereta api yang sedang bergerak lurus dipercepat.
Kembali ke eksperimen kita. Setelah meja berputar dengan kecepatan tetap, letakkan cupu es di atas meja. Jika dilihat dari anda yang berputar bersama meja, cupu es akan bergerak dalam lintasan seperti ditunjukkan pada Gb. 2-22.



GB. 2-22 ANDA BERADA DI PUSAT C DI ATAS MEJA YANG BERPUTAR. SEBUAH CUPU ES KERING YANG ANDA LETAKKAN DI A AKAN TAMPAK BERGERAK PADA LINTASAN AB

Tampak bahwa dilihat dari meja yang berputar lintasannya adalah suatu garis lengkung, yang disebut *involusi*. Tidakkah aneh bahwa cupu es yang anda letakkan, jadi mula-mula diam terhadap anda, tanpa ada gaya dalam bidang horizontal bergerak dengan sendirinya menurut lintasan yang melengkung? Menurut Hukum Newton, cupu es haruslah tetap diam di tempat karena tidak ada gaya- gaya horizontal yang bekerja pada cupu tersebut. Karena meja yang berputar adalah suatu kerangka acuan tak inersial, maka tidak heran kalau Hukum II Newton dengan gaya-gayanya tidak berlaku di sini.

Sekarang jika seseorang teman berdiri di lantai yang diam, maka gerak cupu akan terlihat lain. Cupu es akan tampak bergerak pada garis lurus, menyinggung lingkaran berjejari l pada titik A. Cupu bergerak dengan kecepatan tetap karena tidak ada gaya dalam bidang horizontal, untuk ada, karena cupu es terapung pada bantalan uap CO_2 yang keluar dari dasar cupu. Jadi dilihat dari lantai, yaitu suatu kerangka inersial, Hukum II Newton berlaku penuh.



GB. 2-23 DILIHAT DARI ORANG YANG BERDIRI DI ATAS LANTAI DI LUAR MEJA, CUPU ES YANG DILETAKKAN DI A AKAN BERGERAK LURUS DENGAN KECEPATAN TETAP V = ωl, DAN AKHIRNYA JATUH DI LANTAI PADA TITIK D

Untuk orang yang perputar dengan meja lintasan garis lurus ini akan tampak sebagai lengkungan involusi.
Hal yang sama anda alami jika kebetulan duduk di bis yang sedang membelok. Bagian atas badan masih mau terus tetapi bagian bawah sudah belok. Akibatnya badan anda miring, dan ini terasa sebagai suatu dorongan.
Jika anda, yang berputar dengan meja, ingin mempertahankan Hukum Newton, maka anda harus menganggap akan adanya gaya-gaya fiktif yang bekerja pada cupu agar mempunyai lintasan berupa lengkungan involusi.
Ternyata di sini ada *dua* gaya fiktif, yaitu yang disebut gaya *sentrifugal* dan *gaya Coriolis*.

Untuk membahas gaya sentrifugal, misalkan meja telah berputar dengan kecepatan tetap. Anda berada di pusat meja, cupu anda letakkan di meja dan ditahan dengan jari agar cupu berada dalam keadaan diam terhadap anda. Untuk mempertahankan ini anda merasa tarikan arah radial keluar, dan anda harus mengimbanginya dengan menarik benda ke arah pusat putaran jadi anda harus melakukan gaya sentripetal. Jika anda berkeras untuk mempertahankan hukum II Newton dalam kerangka acuan anda, maka anda harus membayangkan akan adanya gaya fiktif yang melawan gaya yang anda lakukan pada benda. Gaya fiktif ini besarnya sama dengan gaya yang anda lakukan, akan tetapi berarah keluar. Gaya fiktif yang bekerja pada benda berarah radial keluar ini disebut *gaya sentrifugal*. Gaya sentrifugal ini mengimbangi gaya sentripetal, sehingga dipandang dari pihak anda yang berada di pusat meja yang sedang berputar, cupu berada dalam keadaan diam; gaya resultan pada benda sama dengan nol. Jelas bahwa gaya sentrifugal ini mempunyai nilai

$$\vec{F}_{cf} = + \frac{mv^2}{R}\ \hat{r}$$

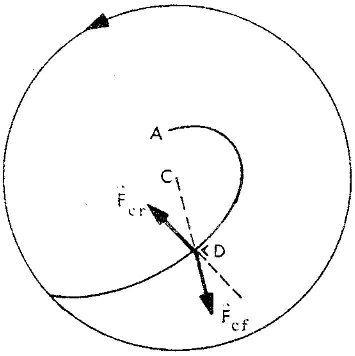
Gaya sentrifugal ini hanya terjadi dalam kerangka yang berputar bersama benda. Gaya fiktif kedua, yaitu *gaya Coriolis*, bekerja jika suatu benda *bergerak* atau *mempunyai kecepatan relatif* terhadap kerangka acuan yang berputar. Untuk percobaan di atas meja berputar dimana vektor kecepatan benda (yang selalu ada dalam bidang meja) adalah tegaklurus dengan sumbu putar, gaya Coriolis ini mempunyai nilai

$$\vec{F}_{cr} = + 2m\omega v\ \hat{c} \quad = \frac{+\ 2mv_T v\hat{c}}{R}$$

dan dengan v_T adalah komponen tangensial $\vec{v}$, vektor $\hat{c}$ adalah vektor satuan arah tegaklurus lintasan pada titik dimana benda berada, berarah *ke dalam*.

Karena pengaruh kedua gaya fiktif ini, yaitu gaya Coriolis dan gaya sentrifugal, cupu es yang anda lepaskan membuat lintasan berupa lengkungan involusi.

Pada Gb. 2-24 dilukiskan gaya-gaya sentrifugal dan Coriolis yang bekerja pada cupu pada waktu membuat lintasan involusi.



GB. 2-24 AB ADALAH LENGKUNGAN INVOLUSI. PADA WAKTU BENDA BERADA DI D GAYA SENTRIFUGAL DINYATAKAN OLEH F_{cf}, (ARAH RADIAL), DAN GAYA CORIOLIS DINYATAKAN OLEH F_{cr} (ARAH TEGAKLURUS LINTASAN)

Gaya Coriolis ini harus diperhatikan dalam menghitung lintasan kapal terbang atau peluru kendali antara benua yang melintasi kutub. Ini disebabkan oleh gerak rotasi bumi, sehingga untuk membahas gerak seperti di atas kita tidak dapat menganggap bumi sebagai kerangka inersial. Suatu lintasan yang dari permukaan bumi tampak sebagai garis lurus, jika dilihat dari luar bumi akan tampak melengkung karena gerak putaran bumi. Begitu juga lintasan yang dari luar bumi tampak sebagai garis lurus, dilihat dari permukaan bumi akan tampak melengkung sebagai lengkungan involusi. Gaya Coriolis juga memegang peranan penting dalam gerak udara pada lintang jauh dari katulistiwa.

2.11 BATAS BERLAKUNYA MEKANIKA NEWTON

Ada dua hal yang merupakan dasar utama dari mekanika Newton. Pertama, waktu adalah suatu besaran absolut, tidak bergantung pada kerangka inersial yang digunakan. Selang waktu sebesar satu detik untuk orang yang berada dalam sebuah kereta api yang bergerak lurus dengan kecepatan tetap adalah sama dengan satu detik dalam pesawat MIG-25 yang bergerak lurus beraturan dengan kecepatan tiga kali kecepatan suara. Dasar ini tidak berlaku untuk gerak dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya.

Dasar kedua adalah bahwa keadaan gerak benda, yang dinyatakan oleh vektor posisi dan kecepatan (atau momentum) kedua besaran ini dapat diukur dengan ketelitian tanpa batas pada saat yang sama. Dasar yang kedua ini ternyata tidak berlaku pada ukuran kecil di dalam atom.

Marilah kita bahas dasar pertama lebih dahulu, yaitu bahwa waktu adalah besaran absolut. Akibat dari asumsi ini ialah bahwa kecepatan cahaya akan bergantung pada kerangka acuan yang digunakan. Kecepatan cahaya diukur dalam kerangka yang diam akan berbeda dengan kecepatan cahaya dalam kerangka yang bergerak lurus dengan kecepatan konstan. Hal ini sudah diselidiki oleh Michelson dan Morley yang tidak dapat mengamati adanya perbedaan kecepatan cahaya jika diamati dalam arah putaran bumi, atau arah berlawanan dengan putaran bumi. Kepekaan alat yang mereka pakai sudah cukup baik. Albert Einstein kemudian menyatakan bahwa kecepatan cahaya adalah suatu besaran absolut dalam kerangka inersial. Sebagai akibat dari postulat ini, waktu tidak dapat lagi dipertahankan sebagai suatu besaran absolut, akan tetapi harus dipandang sebagai besaran relatif, bergantung pada kerangka inersial yang dipergunakan. Akibat selanjutnya hukum-hukum alam harus dinyatakan dalam empat dimensi, dimana waktu memegang peranan sebagai dimensi keempat. Selanjutnya massa sebuah benda menjadi bergantung pada kecepatan benda, dan hukum Newton dalam bentuk yang kita kenal menjadi tak berlaku lagi.

Perubahan massa terhadap kecepatan ini baru berarti untuk kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Mekanika, atau lebih umum Fisika, untuk daerah kecepatan mendekati kecepatan cahaya ini diciptakan oleh Albert Einstein, dan ada dalam daerah *teori relativitas*. Untuk kecepatan jauh lebih kecil dari kecepatan cahaya, teori relativitas memberikan mekanika Newton. Jadi dalam pengalaman hidup kita sehari-hari, mekanika Newton tetap berlaku. Untuk partikel-partikel nuklir, yang kebanyakan bergerak sekitar kecepatan cahaya, kita harus menggunakan mekanika relativistik.

Pembatasan kedua terhadap mekanika Newton adalah untuk ukuran-ukuran atom. Dalam daerah ukuran ini keadaan suatu benda tidak lagi dapat dinyatakan dengan posisi dan momentum. Keadaan benda dinyatakan dengan suatu fungsi keadaan, yang menyatakan *kemungkinan* benda berada pada keadaan tertentu. Mekanika untuk ukuran atom ini disebut *mekanika kuantum*, yang dikembangkan oleh sarjana-sarjana fisika pada tahun 1920-1930, yaitu Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul A. Dirac dan lain-lain.

Sebagai ganti hukum II Newton, orang menggunakan persamaan Schrödinger. Untuk ukuran makroskopik, mekanika kuantum kembali memberikan mekanika Newton.

Kita telah membahas kesukaran-kesukaran dari mekanika Newton atau mekanika klasik agar anda tidak mendapat kesukaran dalam menerima modifikasi dan perubahan di dalam mekanika Newton. Banyak sarjana-sarjana teknologi maupun ilmiah yang bekerja dalam daerah dimana modifikasi ini tidak dapat diabaikan. Sudah barang tentu Newton tidak dapat membayangkan hal ini semua. Teorinya merupakan kemenangan dalam dunia pemikiran manusia. Bahkan sekarang tiga abad setelah ditulis bukunya Principia, para sarjana mendapatkan hukum-hukum Newton cukup baik untuk membahas persoalan-persoalan yang mereka jumpai. Mekanika Newton merupakan fondasi di atas mana Fisika modern bertumpu.

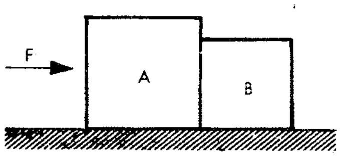
Soal latihan

1 Sebuah benda bergerak lurus di atas lantai kasar. Kecepatan awal benda adalah V_o, dan benda berhenti setelah bergerak sejauh L. Bila massa benda m, dan percepatan gravitasi adalah g, tentukan hubungan antara koefisien gesekan lantai dengan besaran-besaran di atas.

2 Sebuah bola besi dilepaskan bebas di dalam suatu cairan. Gaya gesekan antara bola dengan cairan adalah sebanding dengan laju bola setelah beberapa lama bola akan bergerak dengan laju tetap, karena pengaruh gesekan ini. Bila diketahui besar gaya gesekan antara bola dan fluida adalah f = b v, sedang massa benda adalah m, dan percepatan gravitasi g, tentukan harga kecepatan akhir yang dicapai.

3 Sebuah balok dilepaskan dari atas lantai miring, dan berhenti setelah menempuh jarak L. Bidang lantai membuat sudut 30° dengan arah horizontal. Bila kecepatan awal adalah V_o, dan percepatan-gravitasi g, tentukan koefisien gesekan lantai.

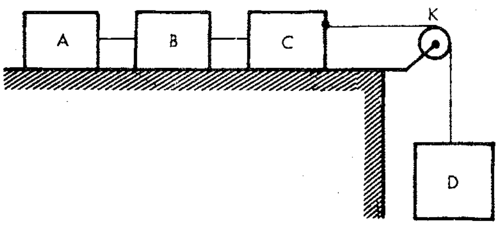
4 Dua buah balok bergerak di atas lantai horizontal seperti pada gambar. Koefisien gesekan lantai adalah 0,5. Balok A bermassa 2 m, dan balok B bermassa m.
Kedua balok tersebut didorong dengan suatu gaya F. Bila diketahui dalam waktu 10 detik laju kedua balok ini mencapai 20 m/det^2, tentukan,



(a) Nilai F.
(b) Gaya yang digunakan untuk mendorong balok B.

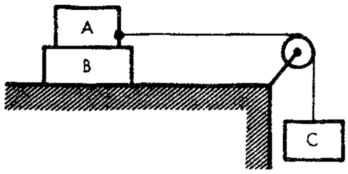
Percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.

5 Tiga buah balok dipasang seperti pada gambar. Balok A bermassa 3m, balok B bermassa m, dan balok C bermassa 2m. Ketiga buah balok ini saling dihubungkan dengan tali tanpa bermassa. Balok C dihubungkan massa dengan pemberat D bermassa 8m, melalui katrol K tanpa massa.



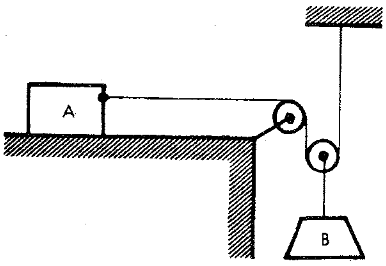
Bila koefisien gesekan adalah 0,5, dan percepatan gravitasi adalah g, tentukan
(a) Percepatan pemberat D
(b) Gaya tegangan dalam tali penghubung B dan C
(c) Gaya yang menarik A.

6 Dua buah balok ditumpuk dan bergerak pada suatu bidang datar di bawah pengaruh pemberat C. Seperti pada gambar. Koefisien gesekan kinetik antara B dengan lantai adalah 0,4, dan koefisien gesekan statik antara A dan B adalah 0,6.



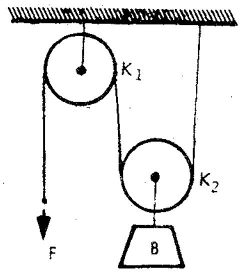
Massa A adalah m, massa B juga m.
(a) Tentukan harga maksimum massa C agar gabungan A dan G masih bergerak bersama.
(b) Berapakah kecepatan gerak sistem dalam keadaan ini?

7 Balok A ditarik oleh pemberat B dengan cara seperti pada gambar.



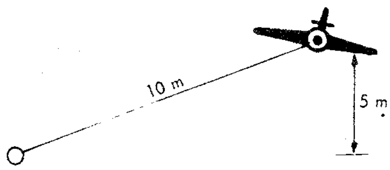
Koefisien gesekan antara A dan B lantai adalah 0,5. Balok A bermassa m, balok B bermassa 3 m.
Tali dan katrol dianggap tak bermassa.
Bila percepatan gravitasi adalah g, tentukan,
(a) Percepatan pemberat B.
(b) Gaya tarik oleh tali pada A.

8



Suatu katrol seperti gambar digunakan untuk mengangkat barang ke atas.
Tentukan nilai F agar B bergerak dipercepat ke atas dengan percepatan g.
Misalkan massa B adalah m.

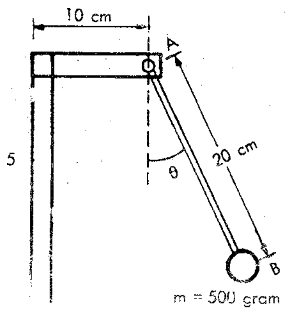
9 Sebuah mainan pesawat terbang bergerak dalam suatu lingkaran pada tinggi 5m, panjang tali adalah 10m. Bila mainan pesawat terbang



ini memerlukan waktu 10 detik untuk bergerak dalam satu lingkaran, dan massa mainan pesawat terbang adalah 300 gram, tentukan gaya tarik pada tali.

10 Data suatu tikungan jalan adalah sebagai berikut. Jejari tikungan 20 m, sudut kemiringan jalan 30° (terhadap arah horizontal), koefisien gesekan antara ban mobil dan jalan adalah 0,5. Jika percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2, tentukan laju maksimum agar mobil dapat bergerak di tikungan dengan selamat (tanpa tergelincir).

11



Pada gambar sebelah diketahui hal berikut. Sistem berputar pada sumbu S. Batang AB ikut berputar dengan sumbu tanpa gesekan. Karena perputaran batang AB membuat sudut $\theta = 30°$ terhadap arah vertikal. Panjang AB = 20 cm, dan massa batang diabaikan. Pada B terletak titik massa 500 gram,
(a) Tentukan gaya tarik pada batang
(b) Tentukan berapa putaran dilakukan oleh batang tiap detik.

3 Gerak harmonik

3.1 GERAK PERIODIK

Suatu gerak yang berulang pada selang waktu yang tetap disebut *gerak periodik*. Beberapa contoh dari gerak periodik adalah gerak ayun bandul lonceng, getaran senar biola, dan gerak ayun dari satu massa yang tergantung pada seutas tali.
Dalam kenyataannya, kebanyakan gerak di atas tidaklah betul-betul periodik karena pengaruh gaya gesekan yang membuang energi gerak. Jadi benda berayun lama-lama akan berhenti, dan senar biola tak lama kemudian berhenti bergetar. Jika gaya-gaya gesekan ini dimasukkan dalam hitungan, maka gerak yang terjadi disebut *gerak periodik teredam*.
Pemecahan dari persamaan gerak periodik selalu dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi sinus atau cosinus. Fungsi seperti ini disebut fungsi *harmonik*. Gerak dengan persamaan berupa fungsi sinus disebut *gerak harmonik sederhana*.
Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang tetap adalah periodik. Jika geraknya adalah bolak-balik pada jalan yang sama, gerak ini disebut *osilasi* atau *getaran*. Satu *getaran* (vibrasi) atau satu osilasi adalah satu gerak pulang pergi. Perioda getaran, yaitu T, adalah waktu yang diperlukan untuk satu getaran. Frekuensi gerak, f, adalah jumlah getaran dalam satu satuan waktu. Jadi frekuensi adalah kebalikan dari perioda, atau

$$T = \frac{1}{f}$$

Posisi saat mana resultan gaya pada benda sama dengan nol, disebut posisi *setimbang*. Simpangan (linier atau sudut) adalah jarak (linier atau sudut) dari partikel berosilasi dari keadaan setimbang. Amplitudo gerak yaitu A, adalah simpangan besar.

3. 2 OSILATOR HARMONIK SEDERHANA

Jika suatu partikel bergetar sekitar suatu posisi setimbang, sedangkan gaya pada partikel sebanding dengan jarak partikel dari posisi setimbang, maka partikel tersebut dikatakan melakukan *gerak harmonik sederhana*. Gaya itu selalu bermaksud mengembalikan partikel kepada posisi setimbang, dan disebut gaya balik.
Suatu contoh dari osilator harmonik sederhana adalah gerak suatu partikel bermassa yang diikat pada suatu pegas. Pegas mempunyai sifat elastik; jika ditarik dan kemudian dilepaskan, pegas akan kembali pada panjang semula.

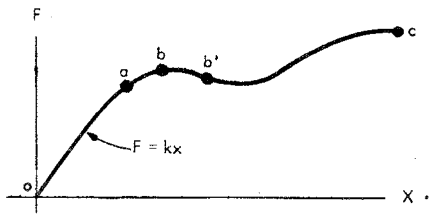
Sifat elastik ini tidak hanya terjadi pada pegas saja, akan tetapi pada hampir tiap benda, dalam batas-batas tertentu. Jika sebatang kawat diregangkan dengan suatu gaya, maka kawat akan bertambah panjang. Jika gaya yang dipergunakan untuk menarik kawat tidak terlalu besar, maka perpanjangan kawat adalah sebanding dengan gaya yang bekerja.

Ini pertama kali ditemukan oleh Robert Hooke (1635 - 1703) seorang kenalan Newton. *Hukum Hooke* dapat dinyatakan sebagai berikut: Jika sebuah benda diubah bentuknya, maka benda itu akan melawan perubahan bentuk (deformasi) dengan gaya yang sebanding dengan besar deformasi, asalkan deformasi ini tidak terlalu besar. Untuk deformasi dalam satu dimensi, atau perubahan panjang saja, maka hukum Hooke dapat ditulis sebagai:

$$F = -kx \qquad (3\text{-}1)$$

Di sini x adalah deformasi atau *perubahan* panjang, F adalah gaya balik oleh bahan, dan k adalah suatu tetapan pembanding. Untuk pegas, k disebut *tetapan pegas*. Tanda negatif menyatakan bahwa gaya selalu melawan deformasi.

Hukum Hooke berlaku pada suatu bahan selama perubahan panjang tidak terlalu besar. Daerah dimana hukum Hooke berlaku *disebut daerah elastik*. Jika suatu bahan mengalami perubahan panjang melampaui daerah elastik, maka benda akan mengalami perubahan bentuk permanen. Daerah deformasi diluar daerah elastik, disebut *daerah plastik*. Dalam daerah plastik perubahan bentuk bersifat permanen. Jika suatu pegas ditarik melebihi batas elastik, pegas tidak kembali lagi pada panjang semula, karena struktur atom-atom dalam pegas telah mengalami perubahan. Sifat ini ditunjukkan pada Gb. 3-1.



GB. 3-1 GRAFIK UMUM DARI HUBUNGAN ANTARA GAYA DAN PERPANJANGAN YANG DIHASILKAN PADA SEBATANG ALUMUNIUM YANG DITARIK

Pada Gb. 3-1 perhatikan bahwa hubungan F = kx hanya berlaku untuk bagian oa, karena setelah ini kemiringan garis tidak tetap lagi.

Titik a adalah *batas elastik*. Antara b dan b' terjadi perpanjangan meskipun gaya dibuat tetap. Pada c benda putus.

Kembali pada osilator harmonik, yaitu sebuah benda bermassa m yang diikatkan pada sebuah pegas. Kita anggap bahwa benda massa dan pegas dapat bergerak tanpa gesekan pada suatu bidang horizontal.

Garis gerak partikel kita ambil sebagai sumbu x, dan posisi seimbang benda kita ambil sebagai titik asal sumbu -x.

Jika partikel ditarik sejauh x pegas melakukan gaya F pada benda sebesar

$F = -kx$

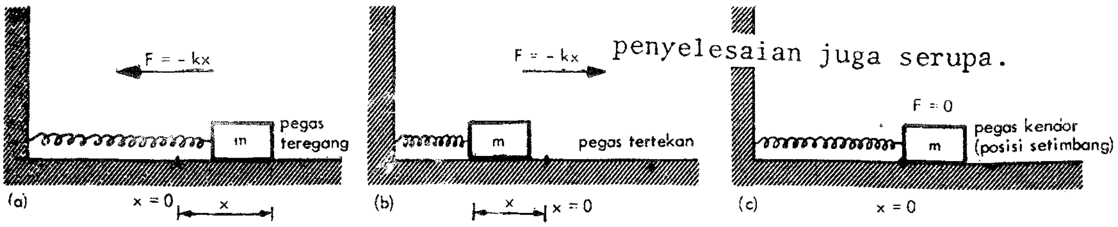
Tanda negatif berarti gaya adalah ke arah kiri bila x positif, dan ke arah kanan bila x negatif.

Jadi gaya pada partikel selalu menuju posisi setimbang x = 0.

Hal ini ditunjukkan pada Gb. 3-2.

Dari hukum II Newton kita peroleh hubungan

$$F = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{atau} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (3\text{-}2)$$



GB. 3-2 OSILATOR HARMONIK SEDERHANA. GAYA YANG BEKERJA PADA BENDA m DITUNJUKKAN PADA GAMBAR. BENDA m BERGERAK TANPA GESEKAN

Persamaan ini mengandung turunan terhadap fungsi x, sehingga disebut *persamaan diferensial*. Jadi persamaan gerak osilator harmonik sederhana adalah penyelesaian persamaan di atas.
Persamaan semacam ini juga akan dijumpai pada gerak getaran senar dan gerak ayunan. Begitu juga dalam listrik (arus bolak-balik) kita akan menjumpai persamaan seperti ini, dimana sebagai ganti perpindahan x, dipergunakan potensial listrik $V(t)$ atau arus listrik $I(t)$. Karena persamaannya sama, dengan sendirinya penyelesaiannya juga serupa.
Gerak osilasi adalah suatu gerak yang sangat penting untuk diketahui, karena berhubungan dengan getaran, baik pada mesin, bumi, maupun molekul dan atom-atom di dalam bahan.

3. 3 GERAK HARMONIK SEDERHANA

Sekarang marilah kita bahas penyelesaian dari persamaan gerak untuk osilator harmonik sederhana yaitu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

Ingat bahwa untuk setiap sistem dengan massa m dimana bekerja gaya $F = -kx$, persamaan ini berlaku. Untuk pegas, tetapan perbandingan k adalah tetapan pegas, dan bergantung pada kaku tidaknya pegas. Untuk sistem osilasi yang lain, tetapan pembanding k mungkin berhubungan dengan sifat-sifat fisis dari sistem yang bersangkutan.
Persamaan (3-2) di atas adalah suatu persamaan diferensial. Persamaan ini memberi hubungan antara suatu fungsi waktu, dengan turunan kedua dari fungsi tersebut terhadap waktu, yaitu $\frac{d^2x}{dt^2}$. Untuk mendapatkan posisi partikel terhadap waktu, kita harus mencari fungsi $x(t)$ yang memenuhi persamaan di atas.
Persamaan (3-2), dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (3\text{-}3)$$

Dari persamaan (3-3) tampak bahwa fungsi x haruslah demikian rupa sehingga jika diturunkan dua kali terhadap t kita peroleh negatif dari fungsi tersebut dikalikan dengan suatu tetapan. Dari kalkulus diferensial kita tahu bahwa fungsi sinus atau fungsi cosinus memenuhi sifat ini. Misalnya

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \qquad \text{dan} \qquad \frac{d^2}{dt^2}(\cos t) = -\frac{d}{dt}(\sin t) = -\cos t$$

Lebih umum lagi, persamaan (3-3) juga dipenuhi oleh fungsi

$$x(t) = A \cos (\omega t + \delta) \tag{3-4}$$

dimana A, ω, dan δ, adalah tetapan.
Jika persamaan (3-4) kita defenisir dua kali, kita peroleh

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} A \cos (\omega t + \delta) = - A \omega \sin (\omega t + \delta)$$

dan

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = - A \omega^2 \cos (\omega t + \delta) \tag{3-5}$$

Sedang

$$\frac{k}{m} x(t) = \frac{k}{m} A \cos (\omega t + \delta) \tag{3-6}$$

Jelas bahwa persamaan (3-3) dipenuhi, jika

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad \text{atau}$$

$$- A \omega^2 \cos (\omega t + \delta) + \frac{k}{m} A \cos (\omega t + \delta) = 0.$$

Jadi jika $\omega^2 = \frac{k}{m}$, maka fungsi $x(t) = A \cos (\omega t + \delta)$ adalah solusi

dari persamaan diferensial osilator harmonik. Harga tetapan-tetapan A dan δ, masih belum tertentu, jadi masih dapat mempunyai harga sebarang. Hal ini berarti bahwa untuk setiap harga A dan δ, fungsi

$$x(t) = A \cos (\omega t + \delta)$$

adalah solusi dari persamaan diferensial osilator harmonik. Akibatnya solusi persamaan (3-2) ada banyak sekali, tergantung pada harga A dan δ. Sebetulnya ini adalah sifat umum dari persamaan diferensial orde dua. Orde dari persamaan ditentukan oleh turunan yang tertinggi dalam persamaan. Karena persamaan diferensial kita adalah orde dua, maka ada dua tetapan yang tidak tentu. Ini tidak lain adalah dua tetapan integrasi yang timbul, karena kita harus melakukan integral dua kali, agar kita peroleh x(t). Akan jelas kemudian, bahwa harga A dan δ untuk suatu gerak harmonik ditentukan oleh keadaan partikel pada awal gerak. Sekarang marilah kita lihat apa *arti fisis* dari tetapan ω. Jika waktu t pada persamaan (6-4) kita tambah dengan 2π/ω, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \{\omega(t + 2\pi/\omega) + \delta\} \\ &= A \cos (\omega t + 2\pi + \delta) \\ &= A \cos (\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Jadi fungsi kembali pada harga semula setelah selang waktu 2π/ω, sehingga 2π/ω adalah perioda gerak, yaitu T.
Karena $\omega^2 = k/m$, kita peroleh

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)}$$

Jadi semua gerak yang memenuhi persamaan (6-3) mempunyai perioda osilasi yang sama, dan ini ditentukan oleh massa m dari partikel yang bergetar dan konstanta pegas k.
Frekuensi osilator adalah banyaknya getaran penuh dalam satuan waktu, dan diberikan oleh

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{dan} \qquad \omega = 2\pi\ f = \frac{2\pi}{T}.$$

Besaran ω seringkali disebut sebagai *frekuensi sudut*, karena mempunyai harga 2π kali frekuensi f, sehingga mempunyai satuan radial/detik.
Tetapan A juga mempunyai arti fisis yang sederhana. Fungsi cosinus mempunyai harga antara - 1 dan + 1. Perpindahan x dari posisi setimbang pada x = 0, mempunyai harga maksimum A. Jadi A (= x_{max}) adalah amplitudo dari gerak osilasi. Karena harga A tidak ditentukan oleh persamaan diferensial kita, gerak harmonik dengan berbagai harga A adalah sama-sama solusi persamaan diferensial osilator harmonik kita, asal frekuensi getarannya sama. *Periode gerak harmonik sederhana tidak bergantung pada amplitudo gerak.*
Besaran $(\omega t + \delta)$ disebut *fasa* dari gerak harmonik. Tetapan δ disebut *tetapan fasa*. Dua gerak mungkin mempunyai amplitudo dan perioda yang sama akan tetapi dengan fasa yang berbeda. Jika $\delta = -\pi/2$, misalnya,

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \delta) = A \cos(\omega t - 90^\circ) \\ &= A \sin \omega t. \end{aligned}$$

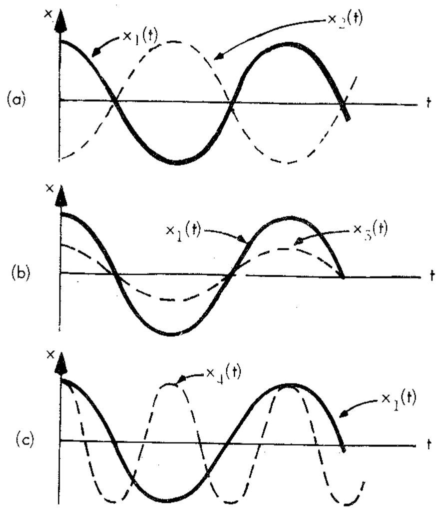
Sehingga perpindahan x mempunyai harga sama dengan nol pada saat t = 0. Jika harga δ sama dengan nol, kita peroleh solusi

$$x = A \cos \omega t$$

yang pada saat t = 0 mempunyai harga maksimum. Harga konstanta fasa yang lain akan memberikan simpangan awal yang berlainan pula. Amplitudo A dan konstanta fasa δ dari osilasi ditentukan oleh posisi dan laju awal dari partikel. Kedua syarat awal ini akan memberikan harga A dan δ yang tertentu. Sekali gerak sudah dimulai, partikel akan bergerak dengan amplitudo dan tetapan fasa yang konstan pada satu harga frekuensi.
Marilah kita lihat grafik x(t) untuk beberapa macam gerak harmonik sederhana, yaitu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega t \\ x_2(t) &= A \cos(\omega t + 180^\circ) \\ x_3(t) &= A/2 \cos \omega t \\ x_4(t) &= A \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

Grafik x terhadap t untuk keempat persamaan gerak di atas dilukiskan pada Gb. 3-3.
Gb. 3-3a menyatakan gerak harmonik sederhana untuk dua benda dengan persamaan gerak $x_1(t)$ dan $x_2(t)$.
Kedua gerak ini berbeda fasa 180°. Tampak bahwa jika pada gerak $x_1(t)$ benda mencapai simpangan maksimum *positif*, benda kedua dengan gerak $x_2(t)$ selalu berada pada simpangan maksimum *negatif*.
Tiap saat simpangan kedua gerak ini selalu sama, hanya tandanya berlawanan.



GB. 3-3 BERBAGAI SOLUSI DARI PERSAMAAN GERAK OSILATOR HARMONIK
(A) $x_1(T)$ DAN $x_2(t)$ MEMPUNYAI AMPLITUDO DAN FREKWENSI YANG SAMA AKAN TETAPI BERBEDA FASA 180°.
(B) $x_1(T)$ DAN $x_3(t)$ MEMPUNYAI FREKWENSI DAN FASA SAMA AKAN TETAPI AMPLITUDO YANG BERBEDA.
(C) $x_1(T)$ DAN $x_4(t)$ MEMPUNYAI AMPLITUDO DAN FASA SAMA, AKAN TETAPI FREKWENSI YANG BERBEDA

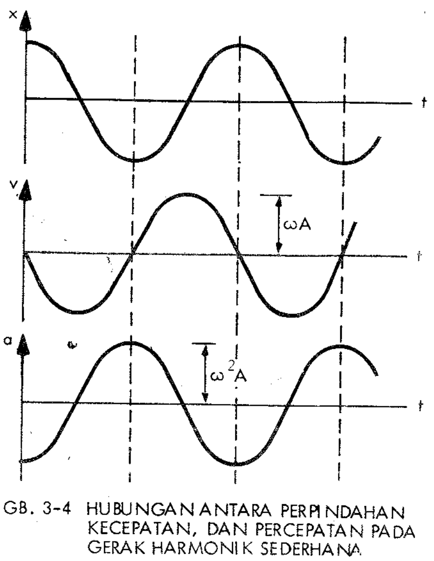
Kedua benda mencapai titik nol (titik setimbang) selalu pada saat yang sama. Nyata bahwa gerak kedua benda ini berlawanan sehubungan dengan ini, dua benda yang bergerak harmonik dengan benda fasa 180° f dikatakan *berlawanan fasa.*
Gb. 3-3b menunjukkan grafik x(t) untuk dua benda yang bergerak harmonik dengan fasa sama. Benda pertama bergerak dengan persamaan $x_1(t)$ dan yang kedua dengan persamaan gerak $x_3(t)$. Nyata bahwa walaupun amplitudo kedua gerak ini berbeda, kedua benda selalu berada pada simpangan maksimum positif, titik setimbang, dan simpangan maksimum negatif pada saat yang sama. Gerak harmonik serempak seperti ini dikatakan *sefasa.*
Gambaran fisis untuk dua gerak harmonik berbeda fasa sebarang tidaklah mudah dilukiskan dengan kata-kata belaka. Satu cara untuk menggambarkan ini adalah dengan melukiskan grafik x(t).

Sifat lain dari gerak harmonik sederhana adalah hubungan antara simpangan, kecepatan, dan percepatan dari partikel yang berosilasi. Marilah kita bandingkan ketiga besaran ini untuk gerak

$$x(t) = A \cos \omega$$

Kecepatan $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ dan percepatan $a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, sehingga untuk gerak di atas kita peroleh

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = - A\,\omega \sin \omega t$$



GB. 3-4 HUBUNGAN ANTARA PERPINDAHAN KECEPATAN, DAN PERCEPATAN PADA GERAK HARMONIK SEDERHANA

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = - A\,\omega^2 \cos \omega t$$

Secara grafis ketiga besaran di atas dilukiskan pada Gb. 3-4.

Contoh 3-1
Sebuah benda titik bermassa 500 gram dipasang pada pegas tanpa massa, dan digetarkan di atas lantai datar tanpa gesekan. Getaran terjadi sepanjang sumbu -x, dan persamaan gerak benda adalah

$$x(t) = 100 + 10 \cos (5\pi\, t + 60°)$$

dengan x posisi benda dalam cm.
Marilah kita tentukan
(a) posisi pegas bila benda ada dalam

keadaan kendor. (posisi setimbang)
(b) perioda getaran
(c) posisi awal, kecepatan awal, dan laju maksimum
(d) tetapan pegas
(e) besar dan arah gaya tarik pada pegas.

Jawab
(a) Dalam menentukan posisi benda bila pegas dalam keadaan kendor, kita perlu ingat bahwa simpangan getaran (dihitung dari posisi setimbang) adalah

$\Delta x = 10 \cos (5\pi t + 60°)$ cm.

Pegas ada dalam keadaan kendor bila $\Delta x = 0$. Jadi posisi benda bila pegas dalam keadaan kendor adalah $x = 100$ cm.
Posisi setimbang ini tercapai pada saat $\Delta x = 10 \cos (5\pi t + 60°) = 0$, atau $5\pi t + 60° = 90° + n(360°)$ dengan n bilangan bulat.
Jadi posisi setimbang terjadi pada saat

$$t = \frac{30° + n(360°)}{5\pi} = \frac{\pi/6 + n(2\pi)}{5\pi}$$
$$= \left(\frac{2}{5} n + \frac{1}{30}\right) \text{ detik;}$$

yaitu untuk

$$t = \frac{1}{30}, \frac{13}{30}, \frac{25}{30}, \ldots \text{ detik}$$

(b) Guna menentukan perioda getaran, perlu diingat bahwa bentuk umum persamaan gerak harmonik sederhana adalah

$\Delta x = A \cos (\omega t + \emptyset_o)$

dengan A amplitudo getaran, dan $\emptyset_o$ fasa awal. Frekuensi sudut ω dinyatakan dalam radial/detik, dan sebanding dengan frekuensi f (dalam cps atau Herzt, sebagai $\omega = 2\pi$).
Dari persamaan gerak, nyata bahwa

$\omega = 5\pi$ radial/detik

Frekuensi getaran

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\pi \text{ radial/detik}}{2\pi \text{ radial}} = \frac{5}{2} \text{ detik} = \frac{5}{2} \text{ Hz}$$

Dalam satu detik ada $\frac{5}{2}$ getaran, berarti bahwa perioda getaran

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2}{5} \text{ detik.}$$

(c) Posisi awal benda dapat ditentukan dengan mengambil $t = 0$, sehingga

$x(t = 0) = 100 + 10 \cos 60° = 105$ cm.

dari titik asal sumbu x, yaitu di sebelah kanan titik setimbang.
Pada saat awal tersebut benda sedang bergerak, dan kecepatan awal dapat ditentukan dari persamaan gerak benda.

Kecepatan sesaat benda dapat dihitung dari

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\ \{100 + 10 \cos (5\pi t + 60°)\}$$

$$= - 10\ (5\pi)\ \sin\ (5\pi t + 60°)$$

$$= - 50\pi\ \sin\ (5\pi t + 60°)$$

Pada saat t=0 kecepatan benda adalah

$$v(t) = -50\pi\ \sin 60° = -25\pi\ \sqrt{3\ \text{cm/det}}$$

Tanda negatif berarti pada saat t=0 benda sedang bergerak ke arah sumbu x - negatif (kekiri).

(d) Tetapan pegas dapat ditentukan bila massa benda dan frekuensi getar diketahui, yaitu dari hubungan gerak

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

jadi kita peroleh

$$k = \omega^2\ m$$

Dengan menggunakan sistem satuan maksimum, kita masukkan harga m = 0,5 kg, sehingga

$$k = (5\pi)^2\ (0,5)\ \text{kg (rad)}^2/\text{det}^2$$

$$= 12,5\ \pi^2\ \text{kg/det}^2$$

Ingat bahwa radial adalah satuan sudut tanpa dimensi, karena radial menyatakan sudut dalam satuan $\frac{\text{panjang busur}}{\text{jejari}}$, yaitu $\frac{\text{dimensi panjang (m)}}{\text{dimensi panjang (m)}}$

(e) Gaya tarik pada pegas dapat dihitung dengan dua cara. Kita dapat menghitungnya dengan menggunakan hukum Hooke, atau dengan hukum Newton. Hukum Hooke menyatakan bahwa dalam batas elastisitas, gaya pada pegas adalah sebanding dengan pertambahan panjang pegas. Sedang pertambahan panjang pegas adalah sama dengan simpangan osilasi (getaran).

Jadi gaya tarik pada pegas F dapat dihitung dari

$$F = + k\ \Delta x$$

dan untuk saat t = 0

$$F\ (t = o) = + k\ \Delta x\ (t = o)$$

$$= + (12,5)(\pi^2)(n/m)(0,05\ m)$$

$$= + 6,16\ \text{newton}.$$

Tanda positif berarti gaya adalah ke kanan.

Cara kedua untuk menentukan gaya tarik pada pegas adalah dari hukum II Newton.

Hukum ini menyatakan bila suatu benda bermassa m mempunyai percepatan a, gaya yang bekerja pada benda tersebut haruslah sama dengan F = ma. Kita dapat tentukan percepatan sesaat benda dari bentuk fungsi kecepatan sesaat v(t), yaitu dari hubungan

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\ \{-\ 50\pi\ \sin\ (5\pi t + 60^\circ)\}$$

$$= -\ (50\pi)(5\pi)\ \cos\ (5\pi t + 60^\circ)$$

Pada saat t = 0 percepatan benda adalah

$$a = -\ 250\pi^2 \cos 60^\circ = -\ 125\pi^2\ \text{cm/det}^2$$

$$= -\ 12{,}32\ \text{m/det}^2.$$

Karena massa benda m = 0,5 kg, gaya yang bekerja pada benda haruslah

$$F = m\ a = (0{,}5\ \text{kg})(-\ 12{,}32\ \text{m/det}^2)$$

$$= -\ 6{,}16\ \text{newton (arah kekiri)}$$

Gaya pada pegas F' adalah reaksi dari gaya F pada benda, dan dari hukum III Newton, F' = - F, sehingga gaya tarik pada pegas adalah

$$F' = +\ 6{,}16\ \text{newton (arah ke kanan)},$$

sesuai dengan hasil yang kita peroleh dari hukum Hooke.

Contoh 3-2
Sebuah benda titik bermassa 200 gram dipasang pada pegas tanpa massa, dan digetarkan di atas lantai tanpa gesekan. Gerak osilasi yang terjadi sepanjang sumbu -x dapat dianggap gerak harmonik sederhana.
Kita diberitahu hal-hal berikut.
Posisi setimbang terletak pada jarak 50 cm dari titik asal sumbu x.
Pada saat t = 0 benda ditarik sejauh 10 cm ke kiri dari titik setimbang, dan dilepaskan. Pegas yang digunakan memiliki sifat berikut; untuk meregangkan pegas sepanjang 10 cm diperlukan gaya 5 newton.
Marilah kita tentukan
(a) berapa banyak osilasi terjadi dalam satu menit.
(b) persamaan gerak benda
(c) bentuk grafik x(t) untuk gerak benda ini.

Jawab
(a) Guna menentukan banyak osilasi dalam satu menit, kita perlu mengetahui frekuensi osilasi f.
Kita tahu bahwa frekuensi sudut, yaitu $\omega = 2\pi f$, berhubungan dengan tetapan pegas k dan massa benda m dari $\omega = \sqrt{k/m}$.
Tetapan pegas k dapat dihitung dari informasi bahwa untuk meregangkan pegas sepanjang 10 cm diperlukan gaya 5 newton.
Hukum Hooke menyatakan bahwa dalam batas elastisitas pegas gaya tarik pada pegas F adalah sebanding dengan pertambahan panjang, atau $F = k\Delta x$. Tetapan pembanding k tidak lain adalah tetapan pegas.
Jadi untuk soal kita

$$k = \frac{5\ \text{newton}}{10\ \text{cm}} = \frac{5\ \text{newton}}{0{,}10\ \text{m}} = 50\ \text{newton/m}$$

selanjutnya frekuensi sudut ω dapat dihitung dari $\omega = \sqrt{k/m}$, dan dengan memasukkan m = 200 gram = 0,2 kg kita peroleh

$\omega = \sqrt{\frac{50}{0,2}} = \sqrt{100} = 10$ radial/detik.

Frekuensi getar $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$ Hz, sehingga dalam satu menit terjadi

osilasi sebanyak $(\frac{5}{\pi})$det × 60 (detik)

$= \frac{300}{\pi}$ osilasi

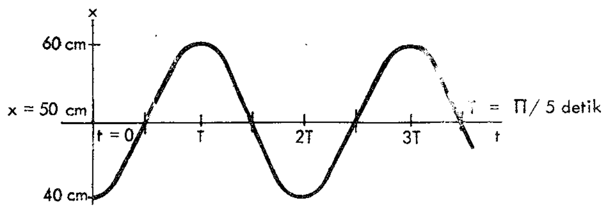
(b) Persamaan gerak benda, yaitu posisi benda tiap saat, dapat ditentukan dari ungkapan

$x(t) = x_o + \Delta x(t)$

Besaran x_o menyatakan posisi setimbang benda diukur dari titik asal sumbu -x, untuk soal kita x_o = 50 cm.
Besaran $\Delta x(t)$ menyatakan simpangan sesaat benda terhadap posisi setimbang. Untuk gerak harmonik sederhana simpangan ini mempunyai bentuk umum

$\Delta x = A \cos (\omega t + \phi_o)$

dengan A amplitudo osilasi, dan ϕ_o fasa awal osilasi.
Pada saat t=0 benda dilepas dari simpangan sebesar 10 cm di sebelah kiri posisi setimbang. Ini berarti amplitudo osilasi A = 10 cm, dan pada saat T = 0 benda mempunyai simpangan Δx = - 10 cm.
Jadi berlakulah hubungan



GB. 3-5 GRAFIK x-t UNTUK PERSAMAAN GERAK $x(t) = 50 - 10 \cos (10t)$

$\Delta x = (t = 0) = \omega \cos \phi_o = -10$

atau

$\cos \phi_o = -1$

Pemecahan persamaan di atas memberikan $\phi_o = 180°$.
Akhirnya dapatlah kita tuliskan persamaan gerak benda sebagai

$x(t) = 50 + 10 \cos (10t + 180°)$

$= 50 - 10 \cos (10t)$

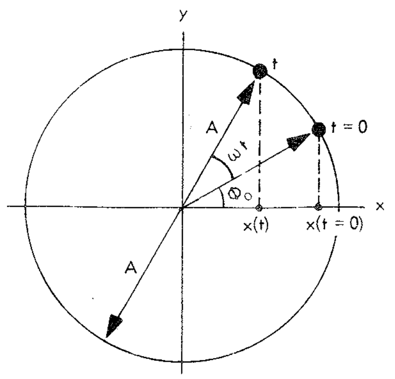
(c) Persamaan gerak benda dapat kita lukiskan dalam grafik x(t) seperti pada Gb. 3-5.

3. 4 DESKRIPSI GERAK HARMONIK DENGAN MENGGUNAKAN VEKTOR

Marilah kita tinjau kembali sejenak sebuah benda yang berosilasi pada sebuah pegas. Misalkan gerak tersebut terjadi di atas lantai datar tanpa gesekan, kita anggap osilasi tadi bersifat harmonik sederhana. Persamaan gerak benda sekitar posisi setimbang dapat kita nyatakan sebagai

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_o) \qquad (3\text{-}7)$$

Besaran $\phi = \omega t + \phi_o$ pada persamaan di atas mempunyai dimensi sudut. Besaran ini disebut *sudut fasa*, atau sering juga disebut *fasa* saja. Besaran ω adalah frekuensi sudut yang menyatakan perubahan sudut fasa dalam satu detik. Kita sudah mencoba menyatakan gerak di atas dengan grafik $x(t)$ seperti pada Gb. 3-3.
Satu cara lain untuk memandang gerak dengan persamaan (3-7) adalah sebagai berikut. Kita pandang sebuah benda titik bergerak lingkar beraturan dengan kecepatan sudut ω dan jejari A.
Misalkan pada saat t=0 benda berada pada titik dengan vektor posisi membuat sudut ϕ_o terhadap sumbu -x (Gb. 3.6)



GB. 3-6 GERAK HARMONIK SEDERHANA SE-PANJANG SUMBU -X DAPAT DI-PANDANG SEBAGAI PROYEKSI GE-RAK LINGKAR BERATUAN

Dalam waktu t detik, benda berada pada sudut $\phi = \omega t + \phi_o$.
Proyeksi vektor posisi benda terhadap sumbu adalah $x = A \cos(\omega t + \phi_o)$, yang menyatakan gerak harmonik sederhana sepanjang sumbu -x.
Nyata bahwa kita dapat memandang gerak harmonik sederhana sepanjang sumbu -x sebagai proyeksi gerak lingkar beraturan pada garis tengah lingkaran yang diambil sebagai sumbu -x.
Pernyataan di atas berarti bahwa kita dapat menyatakan gerak harmonik dengan suatu *vektor* yang berputar dengan kecepatan sudut ω. Panjang vektor menyatakan amplitudo, dan sudut antara vektor dan sumbu -x menyatakan sudut fasa gerak tersebut.
Sebagai contoh, gerak harmonik pada persamaan (3-7) dapat kita nyatakan sebagai

$$x(t) = A < \phi = (\omega t + \phi_o) \qquad (3\text{-}8)$$

Persamaan (3-8) menyatakan suatu vektor dengan panjang A, membuat sudut $\phi = \omega t + \phi_o$ terhadap sumbu -x. Vektor yang berputar ini, yang menyatakan gerak harmonik, juga disebut *fasor*.
Dalam menyatakan fasor suatu gerak harmonik, kita perlu ingat bahwa gerak tersebut terjadi sepanjang sumbu -x, sehingga proyeksi dari fasor selalu berhubungan dengan *fungsi cosinus*. Hal ini berarti kita harus selalu mengubah persamaan gerak harmonik yang kita tinjau menjadi fungsi cosinus lebih dahulu, baru sudut fasa kita ambil sebagai sudut fasor.

Contoh 3-3
Suatu gerak harmonik dinyatakan sebagai

$$x(t) = \omega \sin(10t + 30^\circ) \qquad (3\text{-}9)$$

Marilah kita tentukan fasor untuk gerak ini, dan kita lukiskan fasor untuk saat $t = 0$ dan $t = 0{,}12$ detik.

Jawab
Dalam menggunakan persamaan (3-8) kita harus ubah persamaan (3-9) sehingga berbentuk fungsi cosinus, yaitu menjadi

$x(t) = 10 \cos (10t + 30° - 90°)$

$= 10 \cos (10t - 60°)$

Fasor untuk gerak harmonik ini dapat kita tuliskan sebagai

$\vec{x}(t) = 10 < \phi = (10t - 60°)$

Untuk t = 0 detik fasor ini dinyatakan oleh vektor

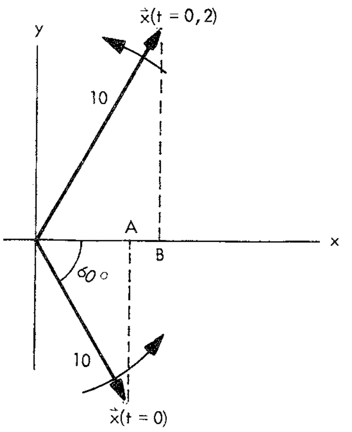
$x(t=0) = 10 < \phi = -60^{o}$

sedang pada t = 0,2 detik mempunyai sudut fasor

$\phi = \omega t - 60^{\circ} = (10)(0,2) \text{ radial} - 60°$

$= (2) \frac{360}{2\pi} - 60^{\circ} = \frac{360°}{3,14} - 60^{\circ}$

karena 2π radial = 360°



GB. 3-7 POSISI FASOR UNTUK GERAK HARMONIK DENGAN PERSAMAAN $x(t) = 10 \sin(10t + 30°)$ PADA SAAT $t = 0$ DAN $t = 0,2$ DETIK

Jadi harga fasor untuk t = 0,2 detik adalah

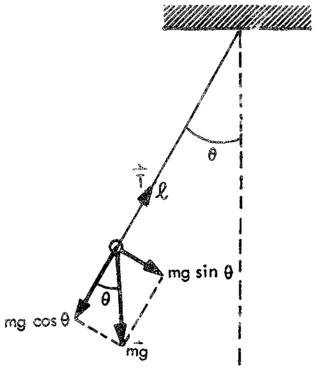
$\vec{x}(t = 0,2) = 10 < \phi = 54,7°$ cm.

Posisi fasor untuk kedua harga waktu ini dapat dilihat pada Gb. 3-7.

Perlu di ingat bahwa deskripsi fasor ini hanya suatu cara untuk memandang suatu gerak harmonik.
Gerak itu sendiri terjadi sepanjang sumbu x, dan posisi benda dapat diperoleh dari proyeksi fasor pada sumbu -x.
Pada Gb. 3-7 posisi benda sepanjang sumbu x pada saat t = 0,2 benda berada di B, sedang bergerak ke kiri.
Deskripsi fasor ini sangat bermanfaat dalam membahas superposisi (perjumlahan) gelombang, dan dalam membahas rangkaian listrik arus bolak-balik.

3. 5 AYUNAN SEDERHANA

Gerak osilasi yang sering dijumpai adalah gerak ayunan. Jika simpangan osilasi tidak terlalu besar, maka gerak yang terjadi adalah gerak harmonik sederhana.
Ayunan sederhana adalah suatu sistem yang terdiri dari sebuah massa titik yang digantung dengan tali tanpa massa dan tak dapat mulur. Ini ditunjukkan pada Gb. 3-8.
Jika ayunan ini ditarik ke samping dari posisi setimbang, dan kemudian dilepaskan, maka massa m akan berayun dalam bidang vertikal di bawah pengaruh gravitasi. Gerak ini adalah gerak osilasi dan periodik. Kita ingin menentukan perioda ayunan.
Pada Gb. 3-8, ditunjukkan sebuah ayunan dengan panjang l, dengan sebuah partikel bermassa m, yang membuat sudut Θ terhadap arah vertikal. Gaya yang bekerja pada partikel adalah gaya berat $\vec{mg}$ dan gaya tarik $\vec{T}$



GB. 3-8 GAYA-GAYA YANG BEKERJA PADA AYUNAN SEDERHANA ADALAH GAYA TARIK $\vec{T}$ DAN GAYA BERAT $m\vec{g}$ PADA MASSA m

dalam tali. Kita pilih suatu sistem koordinat dengan satu sumbu menyinggung lingkaran gerak (tangensial) dan sumbu lain pada arah radial. Kemudian kita uraikan gaya berat $m\vec{g}$ atas komponen-komponen pada arah radial, yaitu mg cos θ, dan arah tangensial, yaitu mg sin θ.
Komponen radial dari gaya-gaya yang bekerja memberikan percepatan sentripetal yang diperlukan agar benda bergerak pada busur lingkaran. Komponen tangensial adalah gaya pembalik pada benda m yang cenderung mengembalikan massa kepada posisi setimbang. Jadi gaya pembalik adalah:

$$F = -\ mg \sin \Theta .$$

Perhatikan bahwa gaya pembalik di sini tidak sebanding dengan Θ akan tetapi sebanding dengan sin Θ. Akibatnya gerak yang dihasilkan bukanlah gerak harmonik sederhana. Akan tetapi, jika sudut Θ adalah kecil maka sin Θ ≅ Θ (radial).
Simpangan sepanjang busur lintasan adalah

$$x = \ell\Theta ,$$

dan untuk sudut yang kecil busur lintasan dapat dianggap sebagai garis lurus. Jadi kita peroleh

$$F = -\ mg\sin\Theta \simeq -mg\Theta = -\ mg\ \frac{x}{\ell}\ ,\ \text{atau}\ F = -\ \frac{mg}{\ell}\ x$$

Jadi untuk *simpangan yang kecil*, gaya pembalik adalah sebanding dengan simpangan, dan mempunyai arah berlawanan. Ini bukan lain adalah persyaratan gerak harmonik sederhana. Tetapan mg/ℓ menggantikan tetapan k pada F = - kx.
Perioda ayunan jika amplitudo kecil adalah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}} \qquad \text{atau} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

3. 6 SUPERPOSISI GERAK HARMONIK

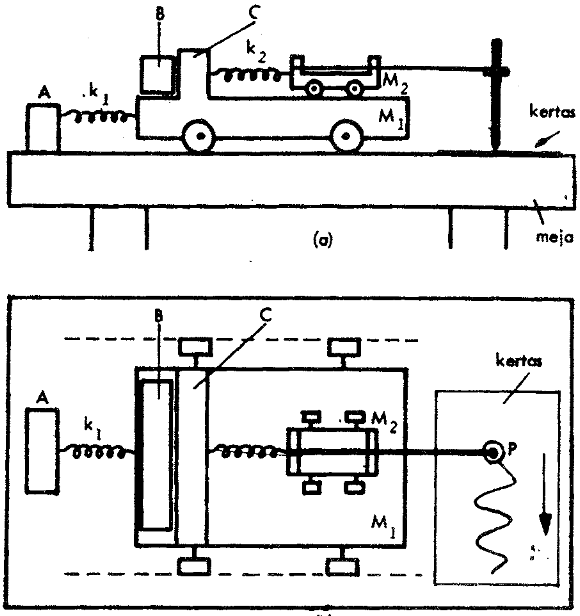
Kita sudah belajar bagaimana menjumlahkan dua buah gerak lurus.
Pada waktu membahas kinematika benda titik kita menguraikan gerak sebuah benda dalam suatu bidang datar menjadi dua gerak yang bebas (tak saling mempengaruhi), yaitu gerak pada sumbu x dan gerak pada sumbu y. Jika kita mengetahui absis x dan ordinat y dari posisi benda pada suatu saat, maka vektor posisi benda pada saat tersebut dapat dinyatakan sebagai $\vec{r} = \hat{i}\ x + \hat{j}\ y$, dengan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ vektor satuan dalam arah sumbu x dan sumbu y. Di sini kita telah menjumlahkan dua gerak, yaitu gerak arah sumbu x dengan persamaan gerak x(t), dan gerak arah sumbu y dengan persamaan y(t), menjadi suatu gerak resultan dengan persamaan gerak $\vec{r}(t)$. Gerak dalam arah x tidaklah bergantung pada gerak pada arah y; dikatakan bahwa kedua gerak ini adalah *bebas* atau *independen. Penjumlahan dua buah gerak bebas seperti di atas disebut superposisi dua buah gerak menjadi suatu gerak resultan.*
Misalkan kita mempunyai sebuah benda yang melakukan dua gerak harmonik serentak pada arah x, yaitu dengan persamaan

$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$ dan $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$

Jika kedua gerak ini tidak saling mempengaruhi, atau bebas, maka gerak resultan yang dialami benda adalah superposisi dari kedua gerak harmonik di atas, yaitu

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

Apakah gerak resultan x(t) juga berupa gerak harmonik sederhana? Pertanyaan kedua yang dapat kita ajukan adalah: apa yang terjadi jika kedua gerak harmonik ini tidak pada satu arah, misalnya gerak pertama pada arah sumbu x, dan gerak kedua pada arah sumbu y? Sebelum menjawab pertanyaan ini marilah kita bayangkan secara fisis bagaimana sebuah benda dapat melakukan dua gerak di atas serentak dengan bebas. Satu dari berbagai peristiwa yang menggambarkan gerak yang kita maksud dilukiskan pada Gb. 3-9.



GB. 3-9 KERETA M_2 BERGERAK HARMONIK PADA ARAH X DIATAS KERETA M_1, SEDANGKAN KERETA M_1 BERGERAK HARMONIK TERHADAP MEJA. GERAK KERETA M_2 TERHADAP MEJA DILUKISKAN OLEH PENA P DIATAS PITA KERTAS YANG BERGERAK
(A) TAMPAK SAMPING, (B) TAMPAK ATAS

Gerak resultan x(t) dari M_2 terhadap meja adalah hasil superposisi gerak $x_1(t)$ dari kereta M_1 terhadap meja, dan gerak $x_2(t)$ dari kereta M_2 terhadap kereta M_1. Grafik x(t) dari gerak resultan dapat dicatat di atas sebuah pita kertas dengan bantuan pena P. Kita ingin agar $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah gerak harmonik sederhana. Ini berarti kita harus usahakan agar gesekan dengan udara dan gesekan kinetik antara roda dengan permukaan tumpuannya sekecil mungkin, sehingga redaman amplitudo menjadi sekecil mungkin. Frekuensi osilasi kereta M_1 ditentukan dari $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$, sehingga bergantung pada tetapan pegas k_1, dan massa M, yaitu massa kereta M_1, ditambah massa kereta M_2. Frekuensi ω_1 ini dapat diatur dengan menambah beban B.

Frekuensi osilasi kereta M_2 adalah $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{M_2}}$; jadi bergantung pada tetapan pegas k_2 dan massa kereta M_2.

Sekarang bagaimana kita membuat agar gerak $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ bebas. Untuk menguji ini misalkan pegas k_1 kita biarkan kendor, pegas k_2 ditekan kemudian dilepaskan. Jika kedua gerak ini bebas maka waktu kereta M_2 berosilasi, kereta M_1 tetap ditempat. Untuk nilai M_2 yang hampir sama dengan massa M_1 ini sukar dicapai. Kereta M_1 harus bergerak karena gerak M_2. Kita dapat usahakan agar pengaruh gerak M_2 pada M_1 sekecil mungkin dengan membuat massa kereta M_1 jauh lebih besar dari kereta M_2

Jika ini telah kita penuhi, maka kita dapat peroleh gerak kereta M_2 terhadap meja,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

yaitu superposisi gerak $x_1(t)$ dan gerak $x_2(t)$.
Jika pegas k_2 ditekan dan pegas k_1 dibiarkan kendor, akan tetapi gerak osilasi kereta M_2 menyebabkan kereta M_1 ikut bergerak, maka gerak M_1 terhadap meja tidaklah sama dengan $x_1(t)$ saja, akan tetapi menjadi $x_1'(t) = x_1(t)\ \{1 + ax_2(t)\}$. Suku $ax_2(t)$ menyatakan pengaruh gerak $x_2(t)$ pada $x_1(t)$. Jika suku ini cukup besar, maka dikatakan bahwa antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ ada *interaksi*. Gerak resultan yang terjadi adalah

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_1'(t) + x_2'(t) \\ &= x_1(t)\ \{1 + ax_1(t)\} + x_2(t)\ \{1 + bx_1(t)\} \\ &= x_1(t) + x_2(t) + (a + b)\ x_1(t)\ x_2(t). \end{aligned}$$

Nyata bahwa gerak resultan adalah sama dengan jumlah atau superposisi dari gerak $x_1(t)$ dan $x_2(t)$, selama suku interaksi, yaitu $cx_1(t)x_2(t)$, dapat diabaikan.
Jadi dapat disimpulkan bahwa *superposisi gerak adalah penjumlahan* persamaan gerak, dan interaksi antara dua gerak akan tampak sebagai *perkalian* persamaan gerak. Untuk selanjutnya kita anggap tak ada interaksi antara dua gerak harmonik, sehingga gerak resultan dari suatu benda yang serentak melakukan dua gerak harmonik adalah superposisi dari kedua gerak harmonik tersebut.

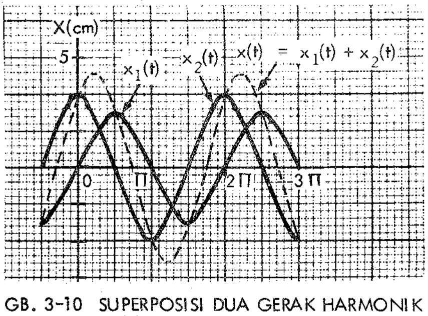
Superposisi dua gerak harmonik searah
Misalkan *frekuensi* dan *fasa* kedua gerak harmonik adalah sama, jadi kita tuliskan

$$x_1(t) = A_1 \cos\ (\omega t + \Phi_o)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos\ (\omega t + \Phi_o)$$

Superposisi kedua gerak harmonik ini menghasilkan

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (A_1 + A_2) \cos\ (\omega t + \Phi_o)$$

yaitu sebuah gerak harmonik baru, sefasa dengan gerak harmonik $x_1(t)$ dan $x_2(t)$, akan tetapi dengan amplitudo $A = A_1 + A_2$.



GB. 3-10 SUPERPOSISI DUA GERAK HARMONIK
$x_1(t) = 3 \sin \omega t$
$x_2(t) = 4 \cos \omega t$
MENGHASILKAN SEBUAH GERAK HARMONIK LAIN

Sekarang bagaimana halnya jika hanya frekuensi $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ sedang tetapan fasa ϕ_1 tak sama dengan ϕ_2 sehingga

$$x_1(t) = A_1 \cos\ (\omega\ t + \Phi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos\ (\omega\ t + \Phi_2)$$

Superposisi kedua gerak harmonik ini menghasilkan

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A_1 \cos\ (\omega t + \Phi_1) + A_2 \cos\ (\omega t + \Phi_2) \end{aligned}$$

Jumlah dua gerak harmonik di atas ditunjuk kan pada Gb. 3-10.

Nyata bahwa hasil superposisi adalah juga gerak harmonik sederhana, dan dapat dituliskan sebagai

$x(t) = A \cos (\omega t + \Phi_R)$

Bagaimana hubungan antara A dengan A_1, A_2, Φ_1 dan Φ_2? Untuk ini kita tuliskan

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos (\omega t + \Phi_R) \\ &= A_1 \cos (\omega t + \Phi_1) \\ &\quad + A_2 (\cos \omega t + \phi_2) \end{aligned} \tag{3-10}$$

Untuk menentukan A dan Φ_R kita gunakan kenyataan bahwa *kedua besaran ini tak bergantung pada waktu.* Kita perlu dua buah persamaan untuk menentukan dua bilangan tak diketahui.
Satu persamaan kita peroleh dengan mengambil $\omega t = 0$ dan satu persamaan lain kita peroleh dengan mengambil $\omega t = -90°$
Jika kita ambil $\omega t = 0$ persamaan (3-10) menjadi

$$A \cos \Phi_R = A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2 \tag{3-11}$$

Jika $\omega t = -\pi/2$ maka persamaan (3-10) menjadi

$$A \sin \Phi_R = A_1 \sin \Phi_1 + A_1 \sin \Phi_2 \tag{3-12}$$

Jika persamaan 3-11 kita kuadratkan, kita peroleh

$$A^2 \cos^2 \Phi_R = A_1^2 \cos^2 \Phi_1 + A_2^2 \cos \Phi_2 + 2 A_1 A_2 \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 \tag{3-13}$$

dan jika persamaan 3-12 kita kuadratkan kita peroleh

$$A^2 \sin^2 \Phi_R = A_1^2 \sin^2 \Phi_1 + A_2^2 \sin^2 \Phi_2 + 2 A_1 A_2 \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \tag{4-14}$$

Jika kedua persamaan di atas kita jumlahkan kita akan peroleh

$$A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\Phi_1 - \Phi_2) \tag{3-15}$$

Jadi amplitudo A dari gerak resultan dapat dihitung dari persamaan 3-15.
Tetapan fasa Φ_R dapat kita peroleh dengan membagi persamaan (3-12) dengan persamaan (3-11), sehingga kita peroleh

$$\text{tg } \Phi_R = \frac{A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2} \tag{3-16}$$

Superposisi gerak harmonik dengan fasor
Kita telah menggunakan aljabar untuk memperoleh superposisi dua gerak harmonik berfrekuensi sama akan tetapi berbeda amplitudo dan tetapan fasa. Cara ini menghasilkan dua buah rumus (persamaan 3-15 dan 3-16). Untuk menentukan amplitudo dan tetapan fasa gerak resultan , kedua rumus ini sukar untuk diingat.
Kita dapat peroleh kedua rumus di atas dengan menggunakan cara penggambaran atau *representasi* gerak harmonik dengan fasor. Dengan cara yang terakhir ini kita tidak perlu menghafal rumus, akan tetapi dapat berlatih membiasakannya.
Cara ini juga digunakan dalam menjumlahkan gelombang, dan pula pada menjumlahkan arus atau tegangan listrik bolak balik.

Seperti telah kita bahas dalam pasal 3.4, kita dapat menggunakan sutu vektor (fasor) $\vec{x}_1(t) = A_1 < \phi_1 = \omega t + \phi_1$ untuk menyatakan gerak harmonik

$$x_1(t) = A_1 \cos (\omega t + \phi_1)$$

selanjutnya gerak harmonik

$$x_2(t) = A_2 \cos (\omega t + \phi_2)$$

dapat dinyatakan dengan fasor

$$\vec{x}_2(t) = A_2 < \phi = \omega t + \phi_2$$

Fasor $\vec{x}_1(t)$ dan $\vec{x}_2(t)$ berputar dengan kecepatan sudut yang sama, yaitu ω.

Jumlah kedua gerak harmonik ini yaitu

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A_R \cos (\omega t + \Phi_R) \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dengan fasor

$$\vec{x}(t) = A_R < \Phi = \omega t + \Phi_R = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) \qquad (3\text{-}17)$$

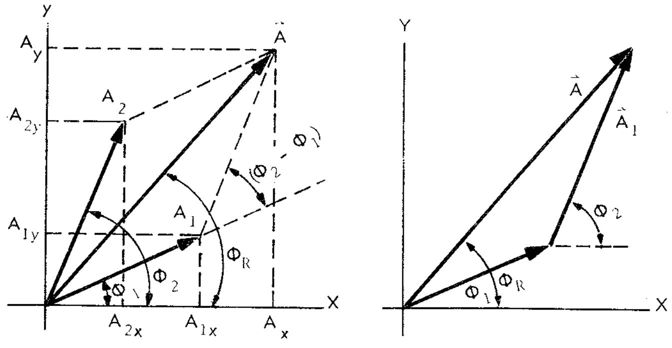
Ketiga fasor $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$, dan $\vec{x}(t)$ berputar dengan kecepatan sudut sama, sehingga untuk memperoleh A_R dan Φ_R kita dapat melukiskan jumlah vektor di atas untuk tiap harga waktu t. Paling mudah kita ambil t = 0, dan untuk mempermudah notasi kita nyatakan

$$\vec{x}_1(t = o) = \vec{A}_1 = A_1 < \Phi_1$$
$$\vec{x}_2(t = o) = \vec{A}_2 = A_2 < \Phi_2$$
$$\vec{x}\ (t = o) = \vec{A}_R = A_R < \Phi_R$$

Persamaan 3-17 dapat kita tuliskan sebagai

$$\vec{A}_R = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \qquad (3\text{-}18)$$

Kesimpulan kita, untuk mendapatkan amplitudo A_R dan tetapan fasa Φ_R gerak resultan, kita gunakan jumlah vektor persamaan (3-18), dengan $\vec{A}_1$ menyatakan vektor (fasor) panjang A_1 membuat sudut Φ_1 dengan sumbu x, dan $\vec{A}_2$ vektor panjang A_2 membuat sudut Φ_2 dengan sumbu x. Jumlah fasor $\vec{A}_1$ dan $\vec{A}_2$ kita lukiskan seperti pada Gb. 3-11.



(a) (b)

GB. 3-11 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

Dari Gb. 3-11 segera kita peroleh bahwa panjang A dapat dihitung dari rumus cosinus untuk segitiga OA_1A yaitu

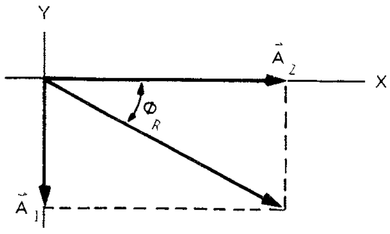
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

dan

$$\operatorname{tg} \Phi_R = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_{1y} + A_2y}{A_1x + A_2x}$$

$$= \frac{A_1 \sin \Phi_1 + A_1 \sin \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_1 \cos \Phi_2}$$

Contoh 3-4
Marilah kita bahas jumlah dan gerak harmonik pada Gb 3-12.



GB. 3-12 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

$x_1(t) = 3 \sin \omega t = 3 \cos (\omega\ t - 90°)$ cm

$x_2(t) = 4 \cos \omega t$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos (\omega t + \Phi_R)$

Jelas bahwa fasor $\vec{A}_1$ mempunyai panjang 3 cm dan membuat sudut -90° dengan sumbu x, sedang fasor $\vec{A}_2$ mempunyai panjang 4 cm dan sudut fasa 0°. Kedua fasor ini dan fasor $A = A_1 + A_2$ dilukiskan pada persamaan (3-12). Harga amplitudo A dapat kita peroleh dari

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ atau $A = 5$ cm

Sedang sudut Φ_R dapat ditentukan dari

$$\operatorname{tg} \Phi_R = - \frac{A_1}{A_2} = - 0,75 \text{ atau } \Phi_R = - 37°$$

Akhirnya kita dapatkan bahwa gerak resultan x(t) dapat ditulis sebagai $x(t) = A \cos (\omega t + \Phi_R)$

$= 5 \cos (\omega t - 37°)$ cm

Superposisi beberapa gerak harmonik
Dengan menggunakan cara fasor ini kita dapat menjumlahkan tiga gerak harmonik atau lebih dengan frekuensi sama, akan tetapi mempunyai amplitudo dan tetapan sudut fasa yang berbeda. Sebagai contoh jika

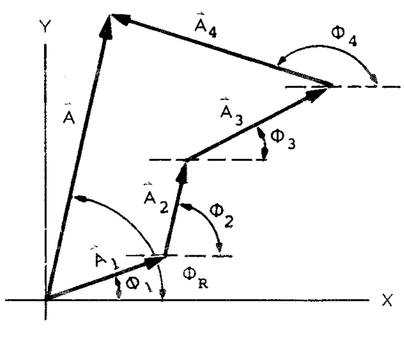
$x_i(t) = A_i \cos (\omega\ t + \Phi_i)$ maka

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} A_i \cos (\omega\ t + \Phi_i) = A_R \cos (\omega\ t + \Phi_R)$$

maka A dan Φ dapat diperoleh dari jumlah fasor

$\vec{A}_R = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$

ini ditunjukkan pada Gb. 3-13.



GB. 3-13 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$

Dalam menjumlahkan gerak harmonik kita harus mempergunakan vektor. Kita harus lakukan ini karena kita menjumlahkan amplitudo dan sudut fasa. Jadi *kita harus menyatakan gerak harmonik dengan sesuatu yang mempunyai besar dan arah (sudut fasa), jadi kita harus menjumlahkan vektor,* ini ternyata mempunyai penggunaan lebih jauh lagi.
Kita akan menjumpai cara ini lagi dalam inferensi gelombang dan dalam membahas rangkaian arus bolak-balik.

Superposisi gerak harmonik gerak dengan frekuensi berbeda
Sekarang bagaimana halnya jika dua gerak harmonik yang dijumlahkan mempunyai frekuensi berbeda. Misalkan

$x_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t$

$x_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t$

Bagaimana bentuk persamaan gerak resultan? Hasil superposisi kedua gerak di atas dapat ditulis sebagai

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos \Phi(t)$

Untuk menentukan A dan $\Phi(t)$ kita gunakan lagi cara fasor.
Fasor $\vec{x}_1(t)$ membuat sudut $\omega_1 t$ terhadap sumbu X_1, dan $\vec{x}_2(t)$ membuat sudut $\omega_2 t$ terhadap sumbu X. Nyata bahwa *kedua vektor ini berputar* dengan kecepatan sudut ω_1 dan ω_2. Dari rumus cosinus kita peroleh

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\omega_2 - \omega_1)t$$

$$\text{dan } \operatorname{tg} \Phi(t) = \frac{A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t}{A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t}$$

Tampak bahwa persamaan gerak superposisi yang terjadi tidaklah sederhana. Sekarang misalkan ω_1 hampir sama dengan ω_2, maka dapat kita tuliskan

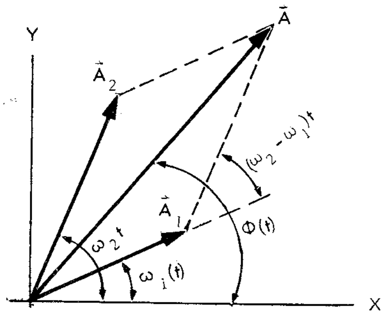
$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ dengan $\Delta\omega < \omega_1$, sehingga

maka $\sin \omega_2 t = \sin (\omega_1 + \Delta\omega)t \approx \sin \omega_1 t$

$\cos \omega_2 t = \cos (\omega_1 + \Delta\omega)t \approx \cos \omega_1 t$

Selanjutnya ini berarti bahwa

$\operatorname{tg} \Phi(t) = \operatorname{tg} \omega_1 t$ atau $\Phi(t) = \omega_1 t$



GB. 3-14 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

Amplitudo gerak superposisi memenuhi hubungan

$$A = \{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\omega\}^{\frac{1}{2}}$$

Amplitudo ini mempunyai harga

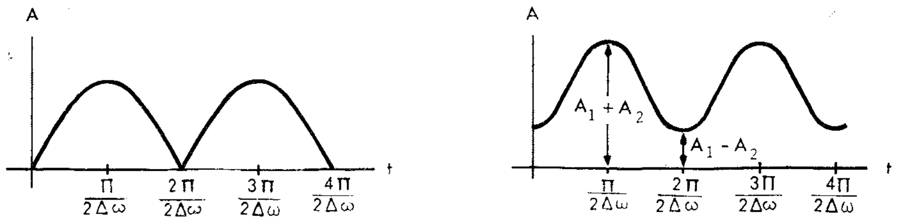
$A = A_1 + A_2$ bila $\Delta\omega t = 2n\pi$,

atau pada saat $t = \frac{2n\pi}{\Delta\omega} = \frac{n}{\Delta f}$, dengan $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$, dan

$A = |A_1 - A_2|$ bila $\Delta\omega t = 2n\pi + \pi$

atau pada saat $t = \frac{(n + \frac{1}{2})}{\Delta f}$

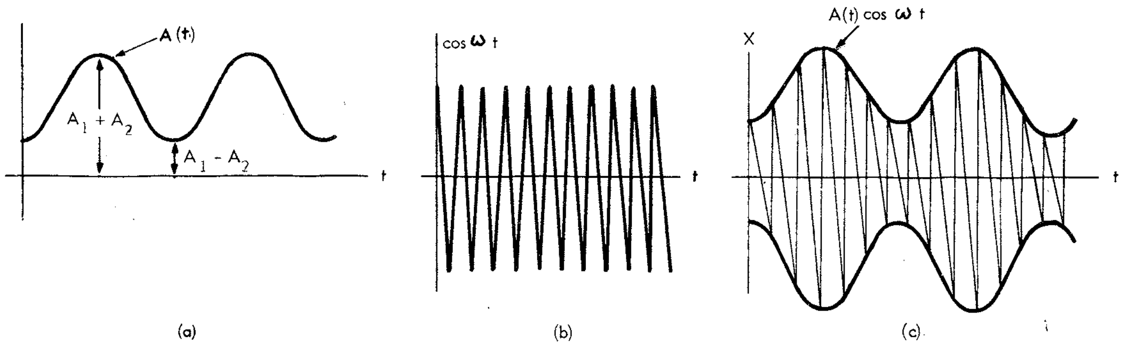
Jadi amplitudo A mempunyai harga yang besarnya berubah dengan waktu secara periodik seperti pada Gb. 3-15.
Perioda perubahan amplitudo adalah $T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta f}$, sehingga frekuensi perubahan amplitudo



GB. 3-15 AMPLITUDO A BERUBAH PERIODIK DENGAN WAKTU (A) $A_1 \neq A_2$, (B) $A_1 = A_2$

$f_A = \Delta f = f_2 - f_1$

Jadi tiap selang waktu $\Delta t = \frac{1}{\Delta f}$ amplitudo mencapai maksimum, kemudian amplitudo mengecil, membesar lagi dan seterusnya. Peristiwa ini disebut *perlayangan*, dan frekuensi $f_A = \Delta f$ adalah frekuensi perlayangannya. Bentuk persamaan gerak $X(t) = A(t) \cos \omega_1 t$ adalah hasil kali $A(t)$ dengan $\cos \omega_1 t$; hasilnya adalah seperti pada Gb. 3-16.



GB. 3-16 (A) A(t),
(B) COS ωt
(C) $x(t) = A(t) \cos \omega t$, HASIL SUPERPOSISI DUA GERAK HARMONIK $x_1(t) = A_1 \cos \omega_1 T$ DAN $x_2(t) = A_1 \cos \omega_2 t$, DENGAN $\omega_1 \simeq \omega_2$

Nyata bahwa gerak superposisi tidaklah sinusoidal murni, akan tetapi amplitudonya berubah secara periodik. Dikatakan bahwa getaran superposisi adalah *termodulasi* oleh fungsi A(t).
Kita akan menjumpai peristiwa yang sama pada gerak gelombang.

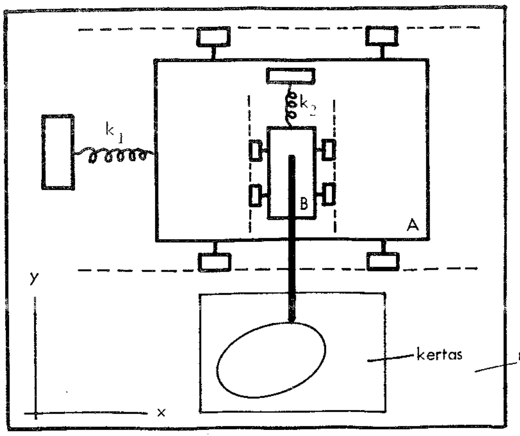
Superposisi dua gerak harmonik saling tegak lurus

Sampai di sini gerak harmonik yang kita jumlahkan berosilasi pada arah yang sama. Sekarang marilah kita selidiki apa yang terjadi pada superposisi dua gerak harmonik dengan arah saling tegak lurus.
Secara matematik kita dapat menyatakan kedua gerak harmonik sebagai berikut. Misalkan gerak pertama adalah pada arah x dengan amplitudo A_x, frekuensi ω_x dan tetapan sudut fasa Φ_x. Gerak ini kita nyatakan sebagai

$$\vec{r}_1(t) = \hat{i}x(t) = \hat{i}\, A_x \cos\,(\omega_x t + \Phi_x)$$

dan gerak kedua kita nyatakan sebagai

$\vec{r}_2(t) = \hat{j}\, A_y \cos\,(\omega_y t + \Phi_y)$, yaitu pada arah y.



GB. 3-17 KERETA A BEROSILASI PADA ARAH X, KERETA B BEROSILASI DI ATAS KERETA A PADA ARAH Y. GAMBAR PADA KERTAS DI ATAS MEJA YANG DILUKISKAN PENA KARENA GERAK KERETA B MENYATAKAN LINTASAN HASIL SUPERPOSISI KEDUA GERAK DI ATAS

Superposisi kedua gerak ini adalah $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$.

$$= \hat{i}\, A_x \cos(\omega_x t + \Phi_x) + \hat{j}\, A_y \cos(\omega_y t + \Phi_y)$$

Bagaimana gerak benda karena superposisi kedua gerak harmonik di atas? Untuk dapat menjawab ini kita tinggalkan matematika sebentar, dan kita pikirkan bagaimana kita dapat menunjukkan peristiwa ini dengan eksperimen. Kita gunakan lagi alat eksperimen kita seperti yang ditunjukkan pada Gb. 3-9, akan tetapi dengan sedikit perubahan (Gb. 3-17).

Kereta A yang dapat bergerak di atas suatu rel, dihubungkan dengan pegas k_1; kereta ini dapat berosilasi pada arah X. Kereta B terletak di atas kereta A dan dapat berosilasi pada arah Y. Gerak kereta B terhadap meja adalah superposisi dua gerak harmonik dengan arah saling tegak lurus. Gerak resultan ini pada kereta B, seperti pada gambar.

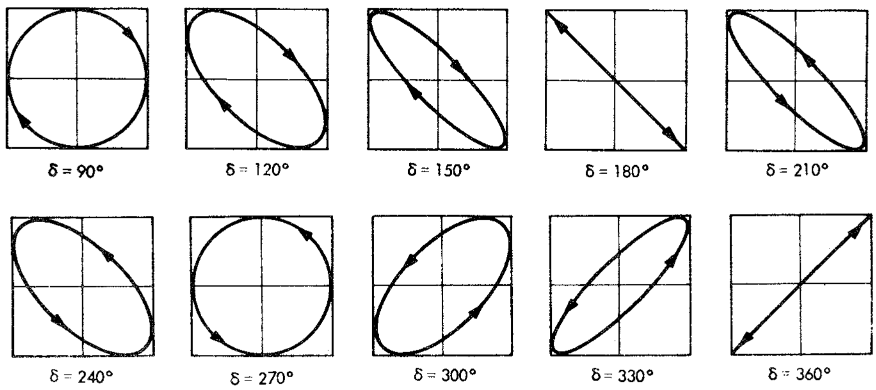
Agar persoalan menjadi lebih sederhana misalkan $A_x = A_y$ dan $\omega_x = \omega_y$.

Maka gerak superposisi $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$ akan mempunyai komponen X $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi_x)$ dan komponen Y; $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi_y)$

Agar amplitudo sama, pegas k_1 dan k_2 harus ditekan sama besar.

Bagaimana kita membuat agar $\omega_x = \omega_y$?

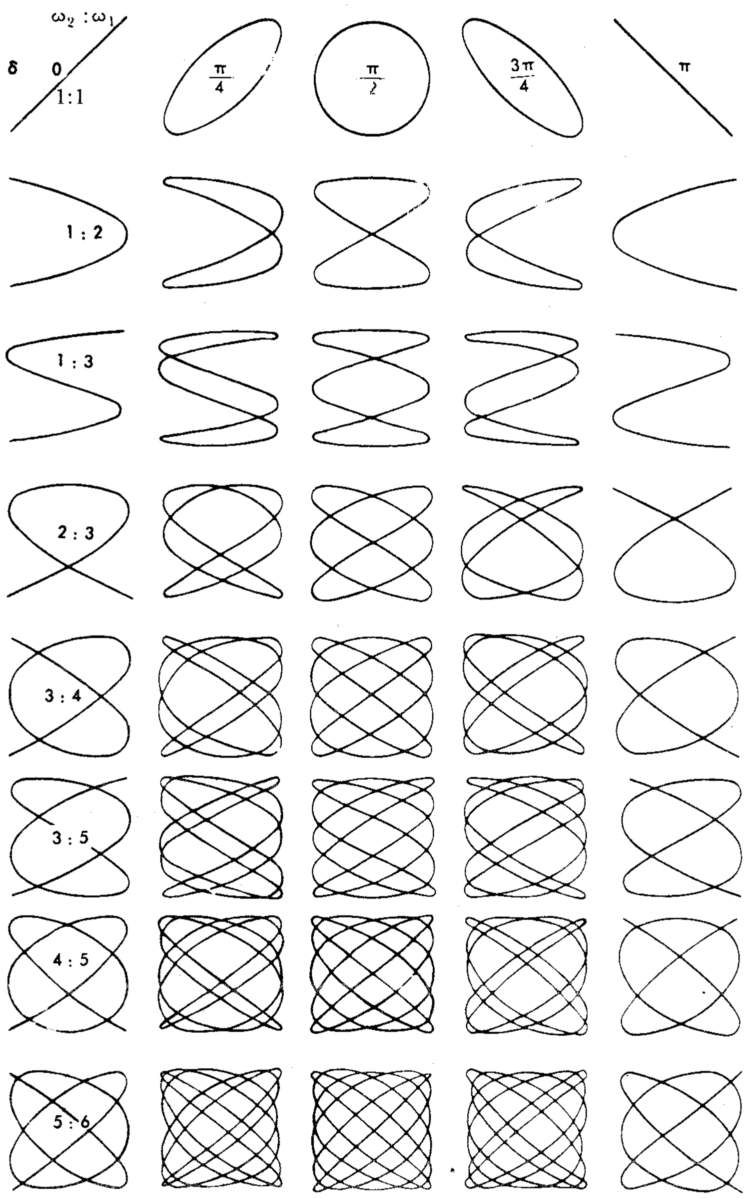
Bentuk lintasan $\vec{r}(t)$ dari gerak superposisi ternyata bergantung pada beda pasa $\Delta\Phi = \Phi_x - \Phi_y$. Untuk $\Delta\Phi = 0°, 60°, 90°, 120°, 180°$, lintasan yang terjadi adalah seperti ditunjukkan pada Gb. 3-18.



GB. 3-18 LINTASAN GERAK SUPERPOSISI DUA GERAK HARMONIK DENGAN ARAH SALING TEGAK LURUS, AMPLITUDO SAMA, DAN FREKUENSI SAMA, BEDA FASA $\Delta\Phi = \delta$

Bentuk lintasan ini dengan mudah dapat diperoleh dengan menentukan harga x dan y untuk beberapa harga waktu t.

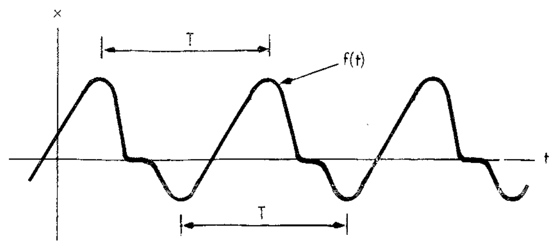
Secara eksperimentil keadaan $\Delta\Phi = 0$ kita peroleh dengan mula-mula menekan pegas k_1 dan k_2 sejauh A, dan melepaskannya serentak.
Keadaan $\Delta\Phi = 180°$ kita peroleh dengan mula-mula *menekan* pegas k_1 sejauh A, *menarik* kereta B hingga pegas k_2 teregang sejauh A, kemudian melepaskan serentak. Keadaan untuk $\Delta\Phi = 90°$ sedikit lebih sukar. Cobalah anda bayangkan sendiri bagaimana keadaan ini dapat dicapai.
Jika ω_x tidak sama dengan ω_y, maka bentuk lintasan untuk berbagai harga $\Delta\Phi = \Phi_x - \Phi_y$ dapat dilihat pada Gb. 3-19.
Bentuk lintasan-lintasan ini disebut *gambar Lissajous*.
Superposisi dua gerak harmonik dengan arah saling tegak lurus akan kita jumpai lagi jika kita membahas sifat polarisasi cahaya.



GB. 3-19 GAMBAR LISSAJOUS

3. 7 ANALISA FOURIER GERAK PERIODIK

Gerak harmonik sederhana merupakan satu bentuk khusus dari gerak periodik. Dalam gerak harmonik sederhana persamaan gerak mempunyai bentuk fungsi sinus. Mungkin sekali kita mempunyai gerak periodik dengan persamaan gerak tidak berbentuk sinus.



GB. 3-20 FUNGSI f(t) PERIODIK DENGAN PERIODA T

Kita dapat menyatakan persamaan gerak ini sebagai

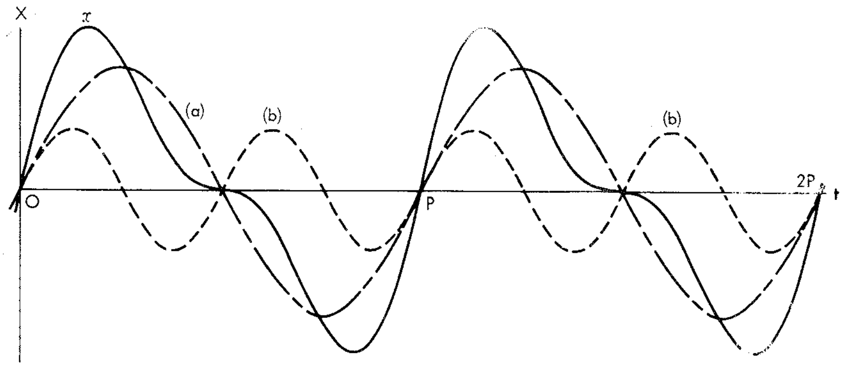
$x = f(t)$

dengan $f(t)$ suatu *fungsi periodik;* ini berarti bahwa ada suatu selang waktu $\Delta t = T$, sehingga $f(t) = f(t + T)$. Selang waktu T ini disebut perioda. Grafik persamaan gerak ini ditunjukkan pada Gb. 3-20.

Sebagai contoh marilah kita pandang gerak dengan simpangan

$$x = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t \qquad (3\text{-}19)$$

Ini adalah hasil superposisi dua gerak harmonik sederhana dengan frekuensi sudut ω dan 2ω , atau dengan perioda T dan T/2. Jelas bahwa x juga periodik, akan tetapi dengan perioda T. Ini ditunjukkan pada Gb. 3-21.



GB. 3-21 SUPERPOSISI DUA GERAK HARMONIK SEDERHANA DENGAN FREKUENSI ω DAN 2ω

Meskipun $x = f(t)$ adalah periodik akan tetapi tidak menyatakan gerak harmonik sederhana.

Jika pada persamaan (3-19) kita tambahkan suku-suku baru dengan bentuk $\sin 3\omega t$, $\sin 4\omega t$, ..., $\sin n\omega t$, ... dengan frekuensi sudut 3ω, 4ω, ..., $n\omega$, ... dan perioda T/3, T/4, ..., T/n, ... atau jika kita tambahkan fungsi-fungsi cosinus dengan frekuensi-frekuensi di atas, gerak $x(t)$ yang kita peroleh *tetap periodik dengan perioda T.* Bentuk fungsi yang tepat bergantung pada banyaknya fungsi sinus dan cosinus yang kita jumlahkan, dan pada amplitudo relatifnya.

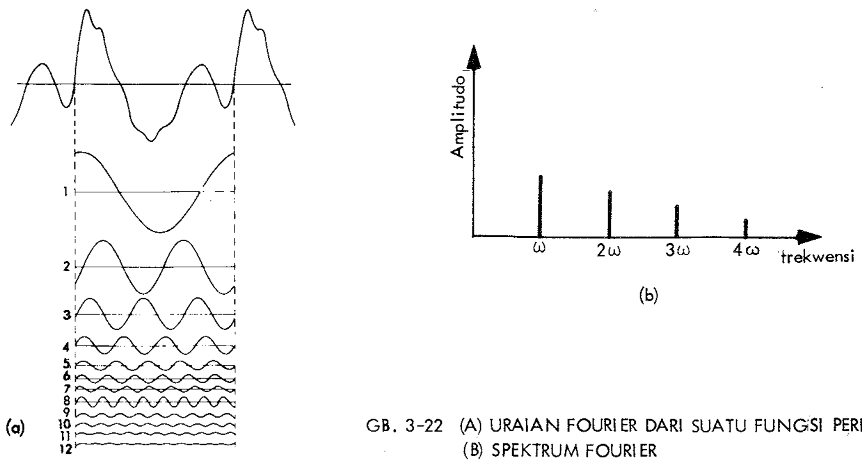
Jadi tampak bahwa dengan menjumlahkan beberapa fungsi harmonik dengan frekuensi merupakan kelipatan dari suatu frekuensi dasar, dan dengan amplitudo-amplitudo yang kita pilih, maka kita dapat memperoleh fungsi periodik sebarang.

Kebalikan dari pernyataan di atas juga berlaku, yaitu bahwa *setiap fungsi periodik f(t) dengan perioda $T = 2\pi/\omega$ dapat dinyatakan sebagai* *suatu superposisi dari suku-suku harmonik sederhana sebagai berikut*

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots + a_n \cos n\omega t + \ldots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots + b_n \sin n\omega t \ldots$$

Pernyataan ini disebut *dalil Fourier*, dan deret di atas disebut *deret Fourier*. Frekuensi ω disebut *frekuensi dasar*, dan frekuensi-frekuensi 2, 3, ..., n, ... disebut *harmonik* atau *overtones*.

Dengan menggunakan dalil Fourier tiap gerak periodik dapat dipandang sebagai superposisi gerak harmonik sederhana. Pada Gb. 3-22 gerak periodik pada gambar paling atas diuraikan atas komponen-komponen Fouriernya, harmonik yang pertama ditunjukkan pada Gb. 3-23(a). Dengan dalil Fourier kita dapat memahami kualitas suara atau warna bunyi berbagai alat musik. Suatu nada tertentu yang dihasilkan oleh



GB. 3-22 (A) URAIAN FOURIER DARI SUATU FUNGSI PERIODIK
(B) SPEKTRUM FOURIER

piano, gitar, atau biola terdengar berbeda oleh telinga kita, meskipun mempunyai frekuensi dasar sama. Perbedaan ini timbul karena amplitudo- dari komponen-komponen Fourier getaran alat-alat musik di atas adalah berlainan. Grafik yang menyatakan besar amplitudo komponen Fourier sebagai fungsi frekuensi disebut *spektrum* gerak periodik. Ini ditunjukkan pada Gb. 3-22(b).

3. 8 GERAK HARMONIK TEREDAM

Sampai di sini kita telah mengabaikan pengaruh gaya gesekan pada osilator kita. Jika tidak ada gesekan, maka suatu ayunan akan terus berosilasi tanpa berhenti. Pada kenyataannya amplitudo osilasi makin lama berkurang, dan akhirnya osilasi akan berhenti. Dikatakan bahwa osilasi *teredam* oleh gesekan, dan gerak osilasi ini disebut *gerak harmonik teredam*. Seringkali gesekan disebabkan oleh hambatan udara. Dalam hal ini besar gaya gesekan biasanya bergantung pada laju gerak. Dalam banyak hal, gaya gesekan adalah sebanding dengan kecepatan benda, dan mempunyai arah berlawanan dengan kecepatan.

Suatu contoh osilator teredam ditunjukkan pada Gb. 3-23.

Persamaan gerak dari suatu osilator harmonik teredam dapat diperoleh dari hukum II Newton, yaitu F = m a, dimana F adalah jumlah dari gaya balik $-kx$, dan gaya redam $-b\frac{dx}{dt}$. Di sini b adalah suatu tetapan positif.

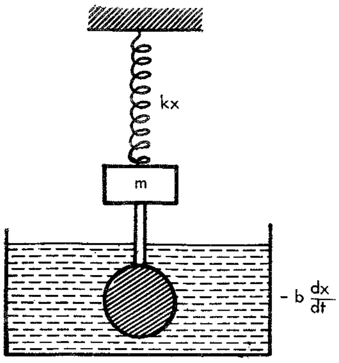
Jadi kita peroleh

$$F = m\,a$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

atau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (3\text{-}20)$$



GB. 3-23 SUATU CONTOH OSILATOR TEREDAM. SEBUAH BOLA DIPASANG PADA BENDA MASSA M, DAN TEREDAM DALAM SUATU FLUIDA. GAYA GESEKAN YANG DIALAMI ADALAH $-b\frac{dx}{dt}$

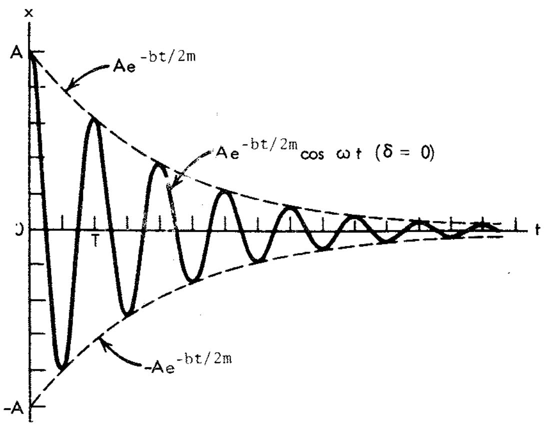
Jika b mempunyai harga kecil, solusi dari persamaan (3-20) (di sini diberikan tanpa bukti), adalah

$$x = A\,e^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega' t + \delta) \qquad (3\text{-}21)$$

dengan

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (3\text{-}22)$$

Pada Gb. 3-24 dilukiskan grafik simpangan x sebagai fungsi waktu untuk gerak osilasi dengan redaman kecil.



GB. 3-24 GERAK HARMONIK TEREDAM DILUKISKAN TERHADAP WAKTU. GERAK INI ADALAH GERAK OSILASI DENGAN AMPLITUDO YANG TERUS BERKURANG

Solusi pada persamaan (3-21) dapat kita artikan sebagai berikut. *Pertama,* frekuensi osilasi adalah lebih kecil, atau perioda osilasi lebih besar jika ada gesekan. Jika tak ada gesekan, maka $b = 0$, dan ω' akan sama dengan $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$, yaitu frekuensi gerak harmonik tanpa redaman. *Kedua,* amplitudo osilasi lama-kelamaan berkurang menjadi nol.

Faktor amplitudo adalah suatu fungsi eksponensial, yaitu $e^{-bt/2m}$.

Sekali lagi, jika tak ada gesekan, atau $b = 0$, maka eksponensial sama dengan satu, dan amplitudo osilasi tidak teredam.

3. 9 GERAK HARMONIK TERPAKSA

Sampai sekarang kita hanya membahas osilasi yang terjadi sendiri atau yang kita sebut sebagai *osilasi bebas.* Gerak osilasi di sini terjadi jika benda massa ditarik dari keadaan setimbang, dan kemudian dilepaskan. Frekuensi osilasi dari gerak yang terjadi disebut *frekuensi alam (frekuensi natural).*

Untuk sebuah massa yang dipasang pada suatu pegas, frekuensi alam dari suatu osilasi bebas adalah:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

jika tak ada gesekan. Adanya gaya gesekan merubah frekuensi osilasi ini menjadi

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

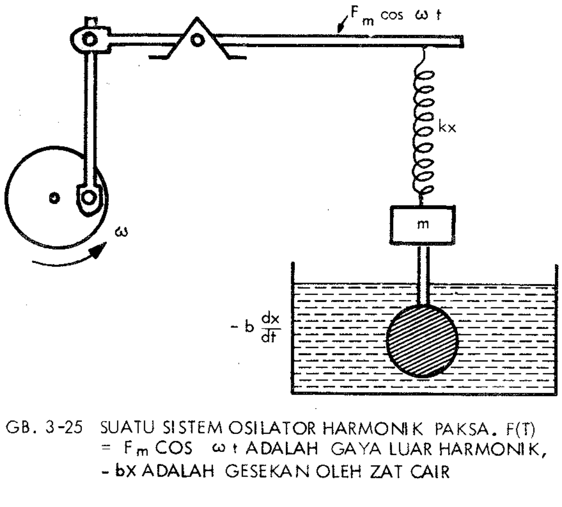
Suatu hal yang menarik akan terjadi jika pada osilator harmonik bekerja gaya luar yang periodik. Sebagai contoh, jembatan bergetar karena sebarisan tentara berbaris di atasnya, badan suatu motor bergetar karena gerak poros, dan sebuah garpu tala dapat digetarkan oleh gelombang bunyi. Osilasi yang terjadi di bawah pengaruh gaya luar disebut *osilasi paksa*.

Dalam osilasi paksa frekuensi osilasi adalah sama dengan frekuensi gaya luar periodik yang bekerja, dan tidak sama dengan frekuensi natural dari osilasi bebas. Akan tetapi respon dari osilator bergantung pada hubungan antara frekuensi paksa dan frekuensi alam dari sistem.

Sederetan impuls-impuls kecil yang dilakukan pada saat yang tepat dapat menghasilkan osilasi dengan amplitudo yang besar. Seorang anak yang bermain ayunan mengetahui bahwa jika ia menjejak papan ayunan pada saat-saat yang tepat, ia akan dapat membuat amplitudo ayunan yang besar. Persoalan osilasi paksa adalah suatu persoalan yang sangat umum. Solusinya bermanfaat dalam bidang akustik, rangkaian arus bolak-balik, fisika atom, maupun mekanika.

Persamaan gerak dari suatu osilasi paksa dapat diturunkan dari hukum II Newton. Di samping gaya balik $-kx$ dan gaya redam $-b\,dx/dt$, kita mempunyai gaya luar yang berosilasi.

Untuk mudahnya, misalkan gaya luar ini kita nyatakan sebagai $F_m \cos \omega t$. Di sini F_m adalah harga maksimum dari gaya luar, dan ω adalah frekuensi sudut gaya ini.



GB. 3-25 SUATU SISTEM OSILATOR HARMONIK PAKSA. $F(T) = F_m \cos \omega t$ ADALAH GAYA LUAR HARMONIK, $-bx$ ADALAH GESEKAN OLEH ZAT CAIR

Agar lebih jelas, pada Gb. 3-25 dilukiskan suatu osilator yang mendapat gaya-gaya di atas. Pada Gb. 3-25 dilukiskan suatu osilator harmonik redam yang digerakkan oleh gaya $F(t) = F_m \cos \omega t$. Gaya ini berasal dari suatu batang kaku yang digetarkan oleh sebuah motor listrik yang berputar dengan frekuensi ω. Harga frekuensi putaran motor dapat diatur dengan mengubah arus listrik di dalam motor. Agar persoalan menjadi lebih sederhana, kita abaikan gaya gravitasi.

Kita mulai dengan hukum II Newton

$F = m\,a$; dan kita peroleh:

$$F = -\,kx - b\,\frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega t = m\,\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ atau}$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega t. \tag{3-23}$$

Persamaan (3-23) adalah persamaan diferensial untuk osilator harmonik redam paksa. Solusi dari persamaan ini (tanpa bukti), memberikan simpangan $x(t)$ yang dihasilkan, yaitu

$$x(t) = \frac{F_m \cos(\omega t - \alpha)}{\{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{F_m}{\{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t - \alpha) \tag{3-24}$$

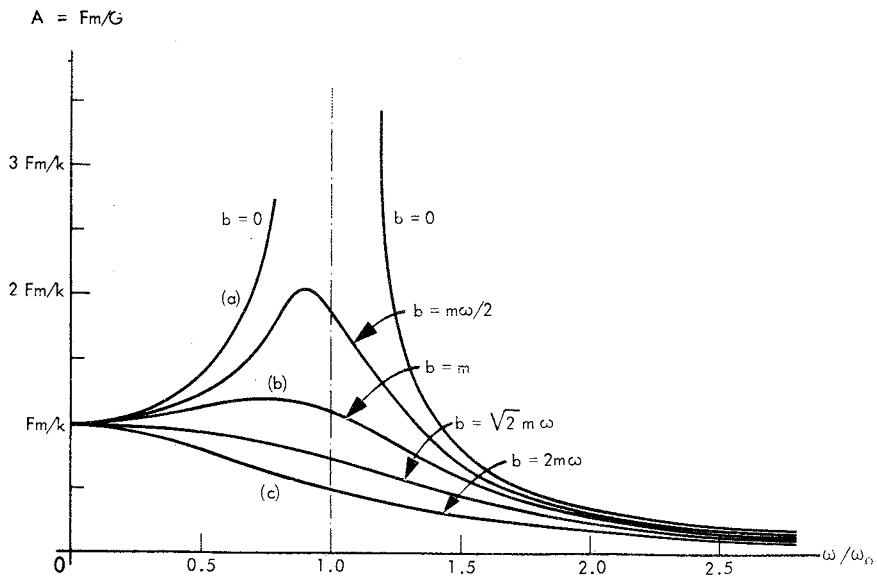
dengan tetapan fasa α diberikan oleh:

$$\sin \alpha = \frac{b\omega}{\{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{3-25}$$

Pada persamaan (3-24) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ adalah frekuensi alam dari osilator.
Marilah kita bahas apa arti solusi matematika di atas secara fisis.
Perhatikan bahwa persamaan (3-24) menyatakan sistem bergetar dengan frekuensi ω, yaitu frekuensi gaya penggetar. Jadi *tidak* bergetar dengan frekuensi natural dari osilator. Juga perhatikan bahwa gerak yang terjadi tidaklah teredam, yaitu tidak ada faktor $e^{-bt/2m}$ pada amplitudo getaran.
Amplitudo getaran yang dihasilkan mempunyai bentuk

$$A(\omega) = \frac{F_m}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \tag{6-18}$$

Jadi amplitudo getaran bergantung pada frekuensi gaya penggetar.
Jika kita lukiskan grafik antara amplitudo getaran paksa, yaitu $A(\omega)$, terhadap frekuensi, kita akan memperoleh grafik seperti pada Gb. 3-26.
Dari gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa jika gaya gesekan tidak terlalu besar, maka amplitudo getaran mencapai suatu maksimum jika frekuensi gaya penggetar, yaitu ω, mendekati frekuensi natural dari osilator, yaitu ω_0. Keadaan ini disebut *resonansi*, dan frekuensi penggetar dimana resonansi terjadi disebut *frekuensi resonansi*.
Jika frekuensi gaya penggetar sama dengan nol, maka simpangan yang dihasilkan adalah sama dengan $A(\omega = 0) = F_m/k$. Ini tidak lain adalah simpangan yang terjadi bila pegas dengan konstanta gaya k ditekan oleh gaya statik sebesar F_m.
Pada keadaan resonansi simpangan yang dihasilkan dapat menjadi lebih besar dari F_m/k, bahkan menjadi besar sekali jika gaya gesekan



GB. 3-26 AMPLITUDO DARI OSILATOR HARMONIK PAKSA DILUKISKAN SEBAGAI FUNGSI DARI PERBANDINGAN FREKUENSI GAYA PENGGETAR DAN FREKUENSI NATURAL DARI OSILATOR. KURVA (a) ADALAH KURVA AMPLITUDO A(ω) JIKA TIDAK ADA REDAMAN, (c) JIKA ADA REDAMAN KUAT.
PERHATIKAN BAHWA PUNCAK RESONANSI MENDEKATI HARGA $\omega/\omega_0=1$ JIKA b MENDEKATI NOL.

adalah kecil sekali.

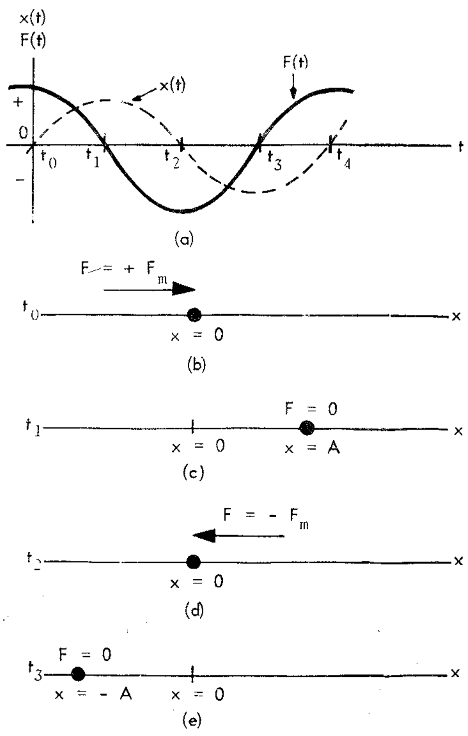
Dalam keadaan resonansi, suatu gaya yang lemah akan tetapi periodik dapat menghasilkan simpangan yang sangat besar. Besar amplitudo dalam keadaan resonansi ditentukan oleh gaya gesekan yang bekerja pada osilator. Hal ini juga ditunjukkan pada Gb. 3-26, jika $b < m\omega$ kita tidak mendapatkan puncak resonansi. Pada $b = m\omega/2$ amplitudo getaran paksa kira-kira dua kali F_m/k, dan pada $b = 0$ *amplitudo getaran pada resonansi menjadi sama dengan tidak berhingga.* Dalam keadaan ini gaya penggetar pada osilator dapat menyebabkan kerusakan mekanis, misalnya pegas putus. Suatu peristiwa yang betul terjadi sehubungan dengan ini adalah runtuhnya jembatan Tacoma Narrows di Puget Sound, Washington, Amerika Serikat. Pada tanggal 1 Juli 1940 jembatan tersebut dibuka untuk lalu lintas kendaraan, dan pada waktu itu mempunyai bentangan nomor tiga terpanjang di dunia. Empat bulan kemudian, suatu angin yang lemah menyebabkan jembatan berosilasi dan bentangan jembatan putus.
Jika gaya gesekan sama dengan nol, maka pada keadaan resonansi energi *terus menerus* diberikan pada sistem melalui kerja yang dilakukan oleh gaya penggetar. Selanjutnya ini hanya dapat terjadi jika osilator tidak melawan gaya penggetar. Dengan kata lain, dalam keadaan resonansi kerja yang dilakukan oleh penggetar selalu positif, atau energi terus diberikan pada osilator. Agar ini terjadi, *osilasi harus berbeda fasa 90°* terhadap gaya penggetar. Jika kita periksa persamaan (3-25), yaitu

$$\sin\alpha = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

maka pada keadaan resonansi dengan harga b kecil, yaitu jika $\omega = \omega_0$

$$\sin\alpha = \frac{b\,\omega}{b\,\omega} = 1, \text{ atau } \alpha = 90^\circ$$

Jadi dalam keadaan resonansi simpangan $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - 90^\circ)$ dan gaya penggetar $F(t) = F_m \cos \omega t$. Jadi kedua besaran ini mempunyai fasa yang berbeda 90°.
Marilah kita tinjau sejenak arti fisis dari perbedaan fasa 90° ini.
Perhatikan Gb. 3-27.



GB. 3-28 (A) GRAFIK F(t) DARI SIMPANGAN GERAK HARMONIK FASA YANG DIHASILKAN
(B) PADA $t = t_0$ BENDA ADA DI $x = 0$ (TITIK SETIMBANG) GAYA $F = + F_m$
(C) PADA $t = t_1$ BENDA ADA PADA $x = + A$ GAYA $F = 0$
(D) PADA $t = t_2$ BENDA ADA PADA $x = 0$, GAYA $F = - F_m$
(E) PADA $t = t_3$ BENDA ADA DI $x = - A$, GAYA $F = 0$.

Dari gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa beda fasa 90° antara gaya dan simpangan pada keadaan resonansi berarti bahwa gaya bekerja mendorong benda pada saat yang tepat.
Waktu benda ada di titik setimbang dan sedang bergerak arah positif, gaya mencapai harga maksimum mendorong benda ke arah kanan. Waktu benda sampai pada simpangan maksimum, gaya sedang mencapai harga nol. Selanjutnya waktu benda kembali ke kiri dan sampai pada titik setimbang, gaya sedang mencapai harga maksimum dan bergerak ke kiri.
Dengan cara begini amplitudo simpangan selalu membesar.
Jika $b = 0$ maka energi terus diterima oleh osilator, sehingga makin lama energi osilator makin besar, dan menjadi tak terhingga.
Akan tetapi karena selalu ada gesekan, maka osilator akan kehilangan energi melalui kerja oleh gaya gesekan. Akibatnya energi yang diterima oleh osilator hanya dapat mencapai suatu harga maksimum, dan amplitudo simpangan pun mempunyai harga maksimum yang berhingga.
Akhirnya perlu diperhatikan bahwa jika b tidak sama dengan nol, resonansi terjadi tidak tepat pada harga $\omega = \omega_0$. Kita dapat menentukan frekuensi resonansi, yaitu dimana kurva resonansi adalah maksimum, dengan mengambil diferensial $A(\omega)$ terhadap ω, yaitu persamaan

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$$

Karena $A(\omega) = F_m\{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2\}^{-\frac{1}{2}}$

maka
$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{F_m}{2}\{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$\{m^2\, 2(\omega^2 - \omega_0^2)(2\omega) + 2\, b^2\omega\} = 0$$

Jadi

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0 \text{ jika } 2m^2(\omega^2 - \omega_0^2) + b^2 = 0$$

dan frekuensi resonansi adalah akar persamaan di atas.
Jika $b \to 0$ maka maksimum dari kurva resonansi terjadi pada $\omega = \omega_0$, seperti ditunjukkan pada Gb. 3-26.

Soal latihan

1. Suatu pegas tanpa massa dipasang vertikal dan dibebani benda bermassa 1 kg. Karena beban ini pegas merenggang 5 cm. Bila tetapan gravitasi adalah 10 m /det^2, tentukan tetapan pegas. Nyatakan hasil anda dalam sistem satuan mks.

2. Suatu pegas mempunyai tetapan pegas 200 N/m. Pegas ini dipasang pada suatu lantai miring, membuat sudut 30° dengan bidang horizontal. Berapa pertambahan panjang pegas bila diberi beban bermassa 10 kg.

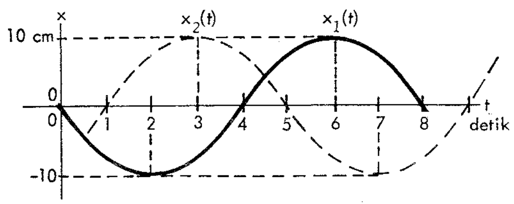
3. Suatu pegas tanpa massa dipasang pada lantai horizontal, satu ujung diikat ditembok , pada ujung yang lain dipasang suatu benda bermassa 600 gram. Benda ditarik, kemudian dilepaskan sehingga berosilasi di sekitar titik setimbang. Persamaan gerak osilasi tersebut adalah $x(t) = 15 \sin 20\, t$.

   Tentukan
   (a) kecepatan benda waktu berada pada posisi setimbang.
   (b) banyak osilasi terjadi dalam 5 menit.
   (c) tetapan pegas tersebut

4. Sebuah benda berosilasi sejajar dengan sumbu x dengan perioda 10 detik. Amplitudo osilasi adalah 20 cm, sedang posisi setimbang benda terletak pada jarak 60 cm dari sumbu -x, dan + 20 cm dari sumbu -y. Bila waktu diukur mulai dari saat benda ada pada setimbang dan sedang bergerak posisi ke kiri, tentukan persamaan gerak benda, yaitu vektor posisi $\vec{r}(t)$.

5. Sebuah benda berosilasi sepanjang sumbu -x. Titik asal sumbu x diambil pada posisi setimbang.
   Perioda osilasi adalah 5 detik, dan laju maksimum adalah 20 cm/detik. Pada saat t = 0 benda ada pada posisi x = 12 cm dan sedang bergerak ke kanan.
   (a) Tentukan persamaan gerak benda.
   (b) Tentukan besar dan arah gaya tarik pada pegas saat t = 1 detik.

6. Kita diberi tahu grafik x(t) untuk gerak harmonik sederhana seperti pada gambar.



   (a) Tentukan bentuk fungsi persamaan gerak $x_1(t)$ dan $x_2(t)$.
   (b) Tentukan laju maksimum benda.
   (c) Bila gerak ini menyatakan benda berosilasi pada pegas, sedang massa benda adalah 100 gram, tentukan tetapan pegas.

7 Suatu gerak harmonik sederhana mempunyai persamaan

$x(t) = 5 \sin (t + 30^\circ)$ cm

(a) Lukiskan fasor simpangan untuk t = 0 dan t = 2 detik.
(b) Lukiskan fasor kecepatan untuk t = 0 dan t = 2 detik.

8 Suatu bandul matematik berayun dengan persamaan gerak

$\Theta = 0{,}1 \sin (2t + 30^\circ)$ radial

dengan Θ menyatakan sudut antara tali dan arah vertikal.
Percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.
(a) tentukan berapa derajat amplitudo simpangan.
(b) tentukan panjang tali.
(c) tentukan laju (dalam cm/det) waktu bandul dalam posisi vertikal.

9 Sebuah benda serentak melakukan dua gerak harmonik sederhana dengan frekuensi sama.
Satu gerak mempunyai persamaan

$x_1(t) = 5 \cos (5t + 45^\circ)$

dan gerak yang lain, $x_2(t)$, mempunyai amplitudo dan tali amplitudo $x_1(t)$ dan sudut fasa 90° lebih besar dari gerak $x_1(t)$
(a) Tentukan persamaan gerak harmonik $x_2(t)$.
(b) Gunakan cara fasor untuk menentukan persamaan gerak resultan.

10 Tiga getaran berfrekuensi sama, arah sama, menghasilkan suatu getaran resultan.
Bila diketahui

$x_1(t) = 100 + 10 \cos \omega t$

$x_2(t) = 50 + 5 \sin \omega t$

sedang simpangan resultan adalah

$x_R(t) = 100 + 5 \cos (\omega t + 45^\circ)$

Tentukan persamaan gerak $x_3(t)$.

11 Sebuah benda serentak melakukan dua gerak harmonik pada arah sama, $x(t) = A \cos (\omega t + \Phi_o)$.
Gerak $x_1(t)$ mempunyai amplitudo A = 5 cm, frekuensi f = 10 cps, dan tetapan fasa $\Phi_O = 0^\circ$.
Gerak $x_2(t)$ mempunyai amplitudo 5 cm, frekuensi f = 15 cps, dan tetapan fasa $\Phi_O = -90^\circ$.
Lukiskan grafik persamaan gerak resultan $x_R(t)$.

12 Sebuah benda melakukan dua gerak harmonik searah.
Gerak pertama mempunyai amplitudo 5 cm, dan frekuensi 10 cps, sedang gerak kedua mempunyai amplitudo 8 cm dan frekuensi 10,2 cps.
(a) Tentukan perioda perlayangan yang terjadi.
(b) Tentukan perbandingan antara amplitudo maksimum dan minimum pada gerak resultan yang terjadi.

13 Lukiskan hasil superposisi dua gerak harmonik berikut

$\vec{r}_1(t) = \hat{i}\ 4 \cos \omega t$ dan $\vec{r}_2 = \hat{j}\ 3 \sin \omega t$

14 Lukiskan hasil superposisi dua gerak harmonik berikut

$\vec{r}_1(t) = \hat{i}\ 4 \cos \omega t$

$\vec{r}_2(t) = (\hat{i}\ 6 + \hat{j}\ 8) \cos \omega t$

15 Sebuah benda bermassa 50 gram digantungkan pada suatu pegas. Akibatnya pegas tersebut bertambah panjang 1 cm. Selanjutnya benda ditarik sejauh 10 cm dan dilepaskan.
Setelah 10 detik amplitudo menjadi 50% amplitudo awal. Tentukan
(a) frekuensi osilasi teredam.
(b) besar gaya gesekan 5 detik setelah berosilasi.

16 Sebuah osilator harmonik teredam terdiri dari pegas dan bermassa. Pegas mempunyai tetapan pegas N/cm, dan benda bermassa 100 gram. Bila digetarkan bebas, osilasi yang dihasilkan teredam. Satu menit setelah digetarkan amplitudo menjadi $\frac{1}{e}$ amplitudo awal, dengan e bilangan natural.
Pada osilator dilakukan suatu gaya sinusoidal dengan amplitudo 10 N, dan frekuensi yang dapat diubah.
(a) Tentukan frekuensi yang memberikan amplitudo maksimum.
(b) Tentukan hasil bagi amplitudo maksimum dengan amplitudo pada frekuensi alam osilator.

17 Suatu gerak periodik dapat diuraikan dalam komponen Fouriernya. Komponen Fourier pada frekuensi dasar mempunyai amplitudo A_1 = 5 cm, dan frekuensi 100 Hz, sedangkan komponen harmonik pertama dan kedua mempunyai amplitudo A_2 = 2 cm, A_3 = 0,5 cm.
(a) Lukiskan spektrum Fourier dari gerak periodik ini.
(b) Lukiskan grafik x(t) dari gerak periodik.
(c) Tentukan laju pada saat t = 2 detik, (misalkan komponen Fourier dasar berbentuk $x_1 = A_1 \cos \omega t$).

4 Kerja dan energi

4.1 ENERGI DAN KERJA

Energi, atau seringkali disebut tenaga, adalah suatu pengertian yang sering sekali digunakan orang. Akhir-akhir ini kita banyak mendengar tentang krisis energi, yang tidak lain adalah krisis bahan bakar. Bahan bakar adalah sesuatu yang menyimpan energi; jika dibakar kita memperoleh energi, yang selanjutnya dapat digunakan untuk transport, atau menjalankan mesin dalam suatu pabrik. Akan tetapi energi adalah suatu pengertian yang tidak mudah didefinisikan dengan singkat dan tepat. Dalam kehidupan sehari-hari kita menghubungkan arti kata energi dengan gerak. Seorang anak yang banyak bergerak dan berlari-lari kita katakan penuh dengan energi. Energi juga dihubungkan dengan kerja. Seorang yang mampu bekerja keras dikatakan mempunyai energi atau tenaga yang besar, sedang orang yang kurang energi tampak lesu dan tidak kuat melakukan kerja.

Transformasi energi

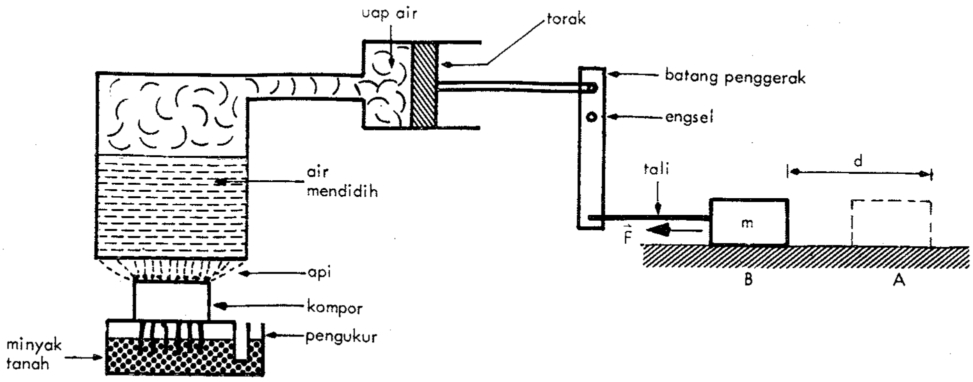
Dalam Fisika kita juga artikan energi sebagai kemampuan melakukan kerja. Energi di dalam alam adalah suatu besaran yang kekal. Energi dapat berubah dari suatu bentuk ke bentuk lain; misalnya pada kompor di dapur, energi yang tersimpan dalam minyak tanah diubah menjadi api. Selanjutnya jika api digunakan untuk memanaskan air, energi berubah bentuk lagi menjadi gerak molekul-molekul air. Contoh lain, energi yang didapat dari pembakaran berubah menjadi energi gerak pada mobil. Perubahan bentuk energi ini disebut *transformasi energi*.

Transfer energi

Energi juga dapat dipindahkan dari satu benda ke benda lain, atau lebih umum, dari satu sistem ke sistem yang lain. Perpindahan energi ini disebut *transfer* energi. Misalnya dalam contoh kita di dapur, energi pembakaran yang ada dalam api dipindahkan ke air yang ada di dalam panci. Perpindahan energi seperti ini, yang terjadi semata-mata karena perbedaan temperatur, disebut *kalor*. Kita akan membahas kalor lebih banyak lagi pada bagian tersendiri.
Energi juga dapat dipindahkan dari suatu sistem ke sistem yang lain melalui gaya yang mengakibatkan pergeseran posisi benda. Perpindahan energi semacam ini adalah yang kita kenal sebagai *kerja mekanik* atau kita katakan sebagai *kerja* saja. Pengertian inilah yang menjadi topik utama bab ini.

Energi adalah suatu kuantitas yang kekal, dapat berubah bentuk, dan dapat pindah dari satu sistem ke sistem yang lain, akan tetapi jumlah keseluruhannya adalah tetap. Energi tidak dapat dibentuk dari nol dan juga tidak dapat dimusnahkan. Kita hanya dapat merubah bentuk energi, atau memindahkan energi.

Proses transfer dan transformasi energi
Agar lebih jelas lagi, marilah kita bahas suatu proses perubahan dan perpindahan energi. Untuk ini kita rancang suatu eksperimen sederhana seperti ditunjukkan pada Gb. 4-1. Sebuah kompor minyak tanah dipergunakan untuk memanaskan air dalam suatu ketel air yang diperlengkapi dengan suatu silinder dan torak. Ketel ini tidak lain adalah suatu motor uap sederhana. Torak mendorong batang penggerak, yang selanjutnya menarik tali. Akibatnya balok m yang dihubungkan dengan tali bergeser sejauh d.



GB. 4-1 SUATU EKSPERIMEN SEDERHANA UNTUK MENUNJUKKAN TRANSFORMASI DAN TRANSFER ENERGI

Energi yang tersimpan sebagai ikatan atom dalam molekul minyak dilepaskan waktu terjadi reaksi pembakaran dengan oksigen dari udara. Sebagian dari energi pembakaran ini dipergunakan untuk memanaskan air di dalam ketel. Di sini transfer atau perpindahan energi dari api ke air di dalam ketel terjadi semata-mata karena perbedaan suhu antara api dan air. Energi yang dipindahkan dengan cara ini disebut *kalor*. Jadi dengan memanaskan air di dalam ketel, kita memasukkan kalor ke dalam air dan dinding ketel. Kalor yang dimasukkan ke dalam air berubah menjadi gerak molekul air yang lebih cepat. Di sini terjadi transformasi atau perubahan bentuk energi. Dari bentuk api menjadi gerak molekul air. Selanjutnya karena gerak molekul air menjadi lebih cepat, sehingga makin banyak molekul air yang lepas dari permukaan; artinya terjadi penguapan yang lebih besar. Bertambah banyaknya uap air di dalam silinder menaikkan tekanan dalam silinder, dan torak mendorong batang penggerak, yang menyebabkan tali menarik benda m dengan gaya F, dan menggerakkan benda m. Gerak benda m terjadi karena gaya F bekerja pada benda, sedang gaya F ditimbulkan oleh dorongan, atau dapat dikatakan bahwa gaya F ditimbulkan oleh motor uap kita.
Pada posisi B benda bergerak lebih cepat dari pada di A, sehingga energi benda m di B lebih besar dari pada di A. Jika pada waktu di B tali dilepaskan dari batang penggerak dan dihubungkan dengan benda lain, maka benda m dapat menggerakkan benda lain tersebut. Jadi benda m memperoleh tambahan energi, yaitu karena adanya perpindahan energi dari

motor uap kita ke benda ini. Perpindahan energi ini dilakukan melalui gaya F yang menyebabkan benda bergeser dalam arah F. *Energi yang dipindahkan dengan cara ini disebut kerja,* atau lebih tepat disebut *kerja mekanik.* Dikatakan bahwa gaya F melakukan kerja pada benda m.
Kerja yang dilakukan oleh gaya F ini memindahkan energi dari pelaku gaya (di sini motor uap kita), ke benda m. *Akibatnya jika pada sebuah benda dilakukan kerja, maka benda itu akan mendapat energi. Sedang jika sebuah benda melakukan kerja, benda tersebut akan kehilangan energi.*

Ukuran transfer energi
Kerja yang dilakukan oleh sebuah gaya dapat diukur dari banyaknya bahan bakar yang diperlukan untuk melakukan kerja tersebut.
Jika dalam eksperimen kita diusahakan agar tidak ada energi yang hilang sebagai kalor, maka energi dari bahan bakar seluruhnya dipergunakan untuk melakukan kerja. Untuk suatu gaya F tertentu yang bekerja pada benda tertentu, perpindahan benda sebesar 2 d memerlukan bahan bakar dua kali sebanyak perpindahan sebesar d. Sedangkan untuk suatu perpindahan tertentu, gaya 2 F memerlukan bahan bakar dua kali sebanyak untuk gaya sebesar F. Jadi kerja yang dilakukan oleh gaya F yang menyebabkan pergeseran benda sebesar Δx dalam arah F dapat dituliskan sebagai

$$\Delta W = F\,\Delta x \qquad (4\text{-}1)$$

Definisi di atas menyatakan bahwa jika pergeseran $\Delta x = 0$ maka tidak ada kerja yang dilakukan. Jika misalnya dalam eksperimen kita benda m ditahan agar tidak bergeser, maka gaya F tidak menaikkan energi benda tersebut; jika tali dilepas di C dan dihubungkan pada benda lain, maka benda m tidak dapat menggerakkan benda yang lain tersebut. Jadi energi yang dipindahkan ke benda m adalah nol, atau tidak ada kerja yang dilakukan oleh gaya F. Dalam keadaan seperti ini energi dari bahan bakar yang dipergunakan akan hilang sebagai kalor, akan tetapi kerja yang dilakukan oleh motor uap adalah sama dengan nol.

Satuan
Mungkin anda bertanya apakah satuan untuk kerja. Dari persamaan (4-1) kita dapat melihat bahwa satuan untuk kerja adalah satuan untuk gaya dikalikan dengan satuan untuk panjang. Dalam sistem satuan MKS, satuan untuk gaya adalah *newton* (N) dan satuan untuk panjang adalah *meter* (m), sehingga satuan untuk kerja haruslah *newton-meter,* (Nm); satuan ini kita sebut *joule.*
Jadi

1 joule = 1 Nm

Dalam sistem satuan cgs, gaya dinyatakan dalam *dyne,* dan panjang dalam *cm,* sehingga kerja dinyatakan dalam *dyne-cm;* satuan ini kita sebut *erg.*
Jadi

1 erg = 1 dyne-cm

Dalam sistem satuan statika fps (Inggris), kerja dinyatakan dalam foot-pound (ft-lb).
Hubungan antara ketiga satuan kerja di atas adalah sebagai berikut

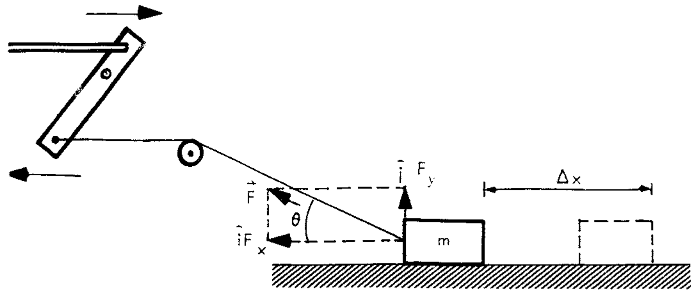
1 joule = 10^7 erg = 0,7376 ft-lb

1 ft-lb = 1,356 joule = $1,356 \times 10^7$ erg

Karena kerja adalah energi yang dipindahkan, maka satuan untuk energi adalah sama dengan satuan untuk kerja.

Gaya tak sejajar gerak

Sekarang, misalkan perpindahan Δx tidak sejajar dengan arah $\vec{F}$, berapakah besar kerja yang dilakukan pada benda. Perhatikan Gb. 4-2.



GB. 4-2 GAYA $\vec{F}$ MEMBUAT SUDUT θ TERHADAP ARAH PERPINDAHAN Δx

Gaya $\vec{F}$ membuat sudut Θ terhadap arah perpindahan Δx. Misalkan Δx cukup kecil sehingga sudut Θ dapat dianggap tetap. Untuk membahas apa yang terjadi, kita uraikan gaya $\vec{F}$ atas komponen-komponen pada arah sumbu X dan Y, yaitu

$$\vec{F} = \hat{i}\,F_x + \hat{j}\,F_y$$

dengan $\hat{i}$ vektor satuan pada arah X, dan $\hat{j}$ vektor satuan pada arah Y. Kita lihat bahwa benda hanya berpindah tempat pada arah X, dan tidak berpindah tempat dalam arah Y. Jadi komponen gaya $\hat{j}\,F_y$ tidak melakukan kerja, sehingga kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ hanyalah

$$\Delta W = F_x\,\Delta x = F \cos\Theta\,\Delta x \qquad (4\text{-}2)$$

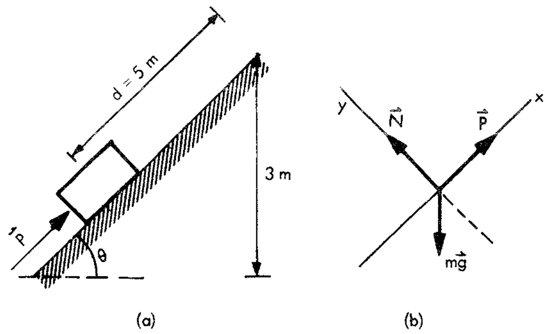
Perhatikan bahwa gaya F dan perpindahan Δx keduanya adalah vektor. Persamaan (4-2) dapat dituliskan dengan notasi vektor, yaitu dengan *perkalian titik* atau *perkalian skalar* antara dua vektor. Akan tetapi kita perlu belajar sedikit tentang ini. Sebelum kita membahas perkalian antara dua vektor, marilah bahas beberapa contoh pemakaian lebih dahulu.

Contoh 4-1

Sebuah balok bermassa 10 kg harus dinaikkan dari dasar ke puncak suatu bidang miring sejauh 5 m. Puncak bidang miring terletak 3.00 m di atas tanah. Jika gesekan diabaikan, berapakah kerja yang harus dilakukan oleh gaya sejajar bidang miring yang mendorong balok ke atas dengan kecepatan konstan?

Situasi persoalannya ditunjukkan pada Gb. 4-3(a). Sedang gaya-gaya yang bekerja pada balok ditunjukkan dalam Gb. 4-3(b).

Pertama-tama kita harus menentukan gaya $\vec{P}$ lebih dahulu. Karena geraknya adalah dengan kecepatan konstan, maka resultan gaya sepanjang bidang miring haruslah sama dengan nol.



GB. 4.3 (A) SEBUAH GAYA $\vec{P}$ MEMINDAHKAN SEBUAH BALOK SEJAUH d SEPANJANG BIDANG MIRING YANG MEMBUAT SUDUT θ DENGAN HORIZONTAL
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS UNTUK BALOK

Jadi

$P - mg \sin \Theta = 0$ atau

$$P = mg \sin \Theta$$
$$= (10{,}0\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/det}^2)\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= 58{,}8\ \text{newton}$$

Maka kerja yang dilakukan oleh P adalah

$$W = P\, d \cos \Theta = P\, d \cos 0^\circ$$
$$= (58{,}8\ \text{N})(5.00\ \text{m})$$
$$= 294\ \text{joule}$$

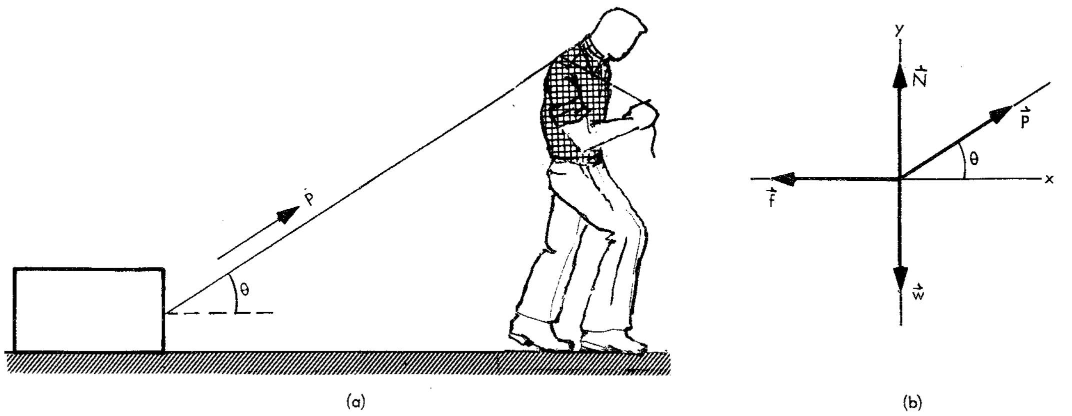
Jika anda mengangkat balok ini vertikal tanpa mempergunakan bidang miring, kerja yang dilakukan haruslah sama dengan gaya vertikal sebesar mg kali jarak vertikal, yaitu

$(98{,}0\ \text{N})(3.00\ \text{m}) = 294$ joule,

sama dengan jika kita lewat bidang miring. Bedanya hanyalah pada bidang miring kita dapat mempergunakan gaya yang lebih kecil (P = 58,8 N), dari pada jika kita mengangkat langsung vertikal (gaya = 98,0 N). Akan tetapi pada bidang miring kita harus mendorongnya lebih jauh (5 m) sedang dalam arah vertikal kita hanya perlu mengangkat sejauh 3 m. Pada proses perpindahan energi oleh kerja ini, dari manakah energi diambil?

Contoh 4-2

Seorang menarik sebuah kotak dengan berat 10 lbs sejauh 30 ft sepanjang suatu permukaan horizontal dengan *kecepatan konstan.*
Berapa besar kerja yang dilakukan pada kotak jika koefisien gesekan kinetik adalah 0,20, dan tarikannya membuat sudut 45° dengan horizontal.



GB. 4-4 GAMBAR UNTUK CONTOH 4-2
(A) SEORANG MENARIK SEBUAH KOTAK DENGAN GAYA P PADA SEBUAH TALI YANG MEMBUAT SUDUT SEBESAR θ DENGAN HORIZONTAL
(B) DIAGRAM GAYA BENDA BEBAS PADA KOTAK

Pada Gb. 4-4a, ditunjukkan persoalannya, dan gaya-gaya yang bekerja pada kotak (dianggap sebagai benda titik) dilukiskan pada Gb. 4-4b. Gaya $\vec{P}$ adalah tarikan orang terhadap kotak, $\vec{w}$ adalah berat kotak, $\vec{f}$ gaya gesekan, dan $\vec{N}$ adalah gaya normal pada kotak.
Kerja yang dilakukan oleh orang pada kotak adalah

$$W = P\ d \cos \Theta$$

Untuk menentukan ini, kita harus menghitung P lebih dahulu. Untuk ini lihat diagram gaya pada Gb. 3-4b. Kotak bergerak dengan kecepatan konstan, sehingga tidak ada percepatan. Hukum II Newton menyatakan bahwa

$$P \cos \Theta - f = 0$$
$$P \sin \Theta + N - w = 0$$

sedang

$$f = \mu_k N$$

untuk menentukan P kita harus menghilangkan (mengeliminir) f dan N, dan dicari harga P. Diperoleh

$$P = \mu_k w/(\cos \Theta + \mu_k \sin \Theta)$$

Dengan $\mu_k = 0{,}20$, $w = 10$ lb. dan $\Theta = 45°$, kita peroleh

$$P = (0{,}20)(10\text{ lb})/(0{,}707 + 0{,}141) = 2{,}4\text{ lb}$$

Dengan d = 30 ft, kerja yang dilakukan orang adalah sebesar

$$W = P\ d \cos \Theta = (2{,}4\text{ lb})(30\text{ ft})(0{,}707) = 51\text{ ft-lb}.$$

Komponen vertikal dari tarikan P oleh orang tidak melakukan kerja pada kotak. Akan tetapi perhatikan bahwa tarikan ini mengurangi gaya normal antara kotak dan permukaan jalan ($N = w - P \sin \Theta$) dan dengan demikian mengurangi besar gaya gesekan ($f = \mu_k N$).
Apakah orang itu akan melakukan kerja lebih sedikit, sama atau lebih banyak, jika kotak tadi ditarik dengan tali pada posisi horizontal?

4.2 PERKALIAN SKALAR

Jika kita mempunyai dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, maka *perkalian skalar* antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dituliskan sebagai $(\vec{a}.\vec{b})$. Perkalian skalar ini juga disebut *perkalian titik*. Perkalian skalar antara dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ didefinisikan sebagai:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \Theta \qquad (4\text{-}3)$$

dengan $|\vec{a}|$ menyatakan besar vektor $\vec{a}$, dan $|\vec{b}|$ menyatakan besar vektor $\vec{b}$. Untuk mempersingkat penulisan, maka besar vektor $|\vec{a}|$ ditulis sebagai a. Jadi persamaan 4-3 dapat ditulis sebagai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\ b \cos \Theta \qquad (4\text{-}3)a$$

Dari persamaan 3-3, jelas bahwa jika vektor $\vec{a}$ sejajar vektor $\vec{b}$, maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b$$

dan jika $\vec{a}$ tegak lurus vektor $\vec{b}$, maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

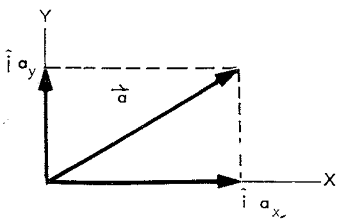
Perhatikan bahwa hasil kali skalar dari dua buah vektor adalah suatu *skalar*. Pada bagian lain kita akan membahas perkalian dua vektor yang menghasilkan vektor.
Di samping itu, juga kita peroleh hubungan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad (4\text{-}4)$$

dan dapat dibuktikan

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad (4\text{-}5)$$

Dalam ruang berdimensi dua, sebuah vektor dapat dituliskan sebagai jumlah vektor-vektor komponen dalam arah X dan Y (lihat Gb. 4-5).



GB. 4-5 $\vec{A} = \hat{i}\, A_X + \hat{j}\, A_Y$

Vektor komponen dari $\vec{a}$ pada arah X adalah $\hat{i}\, a_x$ dan pada arah Y adalah $\hat{j}\, a_y$, dimana $\hat{i}$ adalah vektor satuan pada arah X, dan $\hat{j}$ adalah vektor satuan pada arah Y.
Jadi $|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$, sedang $\hat{i}$ tegak lurus $\hat{j}$.
Akibatnya

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

Jika vektor $\vec{a} = (a_x, a_y) = \hat{i}\, a_x + \hat{j}\, a_y$, dan vektor $\vec{b} = (b_x, b_y) = \hat{i}\, b_x + \hat{j}\, b_y$, dilakukan perkalian skalar, maka

$$\begin{aligned} \vec{a}.\vec{b} &= (\hat{i}a_x + \hat{j}a_y).(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y) \\ &= \hat{i}.\hat{i}a_xb_x + \hat{i}.\hat{j}a_xb_y + \hat{j}.\hat{i}a_yb_x + \hat{j}.\hat{j}a_yb_y \\ &= a_xb_x + a_yb_y \end{aligned}$$

karena

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1, \text{ dan } \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0$$

Jadi kita peroleh hubungan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y = a\, b \cos\Theta \qquad (4\text{-}6)$$

Persamaan (4-6) berarti bahwa jika diberitahu komponen-komponen dari $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, kita dapat menghitung sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.
Dari persamaan 4-6 juga kita peroleh bahwa

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_xa_x + a_ya_y = a_x^2 + a_y^2$$

atau panjang vektor a adalah:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

yang tidak lain adalah dalil Pythagoras.
Dalam ruang berdimensi tiga, vektor $\vec{a}$ dapat ditulis sebagai

$$\vec{a} = \hat{i}\, a_x + \hat{j}\, a_y + \hat{k}\, a_z$$

dengan $\hat{k}$ adalah vektor satuan dalam arah z, sehingga persamaan 4-6 dapat ditulis sebagai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b \cos$$

Contoh 4.3.
Sebagai contoh, misalkan kita mempunyai dua buah vektor
$\vec{a} = i + 5j$ dan $\vec{b} = 2i + 3j$

Sudut antara a dan b dapat ditentukan sebagai berikut:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x = a_y b_y = a\, b \cos \Theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1 + 5^2} = \sqrt{26} = 5{,}13$

$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{,}60$

$a_x b_x + a_y b_y = (1)\ (2) + (5)(3) = 2 + 15 = 17$

Jadi
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 17 = (5{,}13)(3{,}60) \cos \Theta$
atau

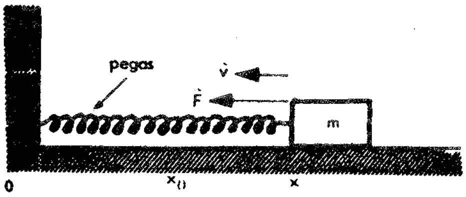
$\cos \Theta = 0{,}92$ dan $\Theta = 23^\circ$

4.3 KERJA OLEH GAYA YANG BERUBAH

Setelah kita tahu tentang perkalian skalar, kita dapat tuliskan kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ yang menghasilkan perpindahan sebesar $\vec{dr}$, sebagai

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} \qquad (4\text{-}7)$$

Dalam persamaan (4-7), $\vec{dr}$ diambil cukup kecil, sehingga dalam pergeseran ini gaya $\vec{F}$ adalah tetap.
Sekarang bagaimana halnya jika pada waktu melakukan kerja gaya berubah besarnya saja. Agar persoalannya menjadi lebih jelas, kita bahas apa yang terjadi jika jalan yang ditempuh oleh benda adalah pada garis lurus dan horizontal. Jadi kita misalkan bahwa benda bergerak pada sumbu X. Misalnya benda ditarik oleh pegas. Besar gaya akan bergantung pada berapa jauh benda berada dari keadaan kendur pegas (Gb. 4-6).

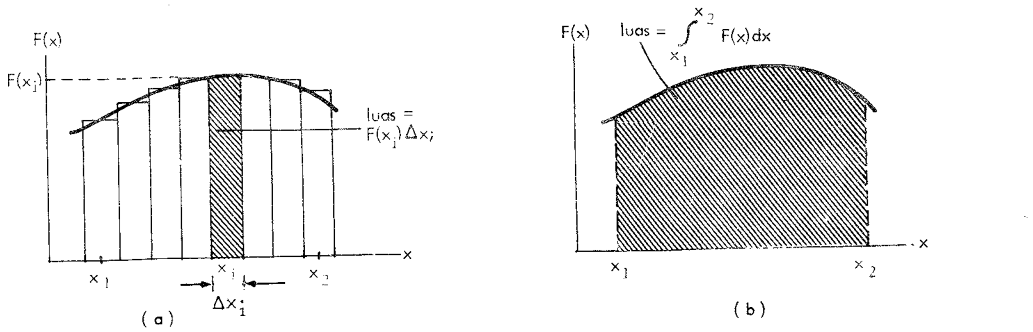


GB. 4-6 GAYA YANG DILAKUKAN OLEH PEGAS $F = k(x - x_0)$. POSISI x_0 ADALAH LETAK UJUNG PEGAS DALAM KEADAAN KENDUR.

Pada Gb. 4-6 ditunjukkan bahwa gaya yang dilakukan oleh pegas untuk menarik benda adalah sebanding dengan $(x - x_0)$, dengan x adalah posisi benda, dan x_0 adalah letak ujung pegas jika berada dalam keadaan kendur. Jadi dapat kita tuliskan bahwa

$$F = - k(x - x_0) \qquad (4\text{-}8)$$

Jelas bahwa di sini gaya yang bekerja berubah dengan tempat.
Sekarang misalkan kita diberi fungsi yang menyatakan perubahan gaya dengan posisi, jadi F(x), dan kita anggap bahwa gaya ini bekerja pada arah x. Juga misalkan benda bergerak pada sumbu X karena gaya ini. Berapakah kerja yang dilakukan oleh benda ini untuk menggerakkan benda dari x_1 ke x_2?
Dalam Gb. 4-7 kita lukiskan gaya F terhadap x.



GB. 4-7 (A) $F(x_i)\ \Delta x_i$ ADALAH LUAS BAGIAN YANG DIARSIR, YAITU KERJA YANG DILAKUKAN OLEH GAYA $F(x_i)$ WAKTU MEMINDAHKAN BENDA SEBESAR Δx_i DISEKITAR x_i
(B) LUAS BAGIAN DI BAWAH KURVA ANTARA x_1 DAN x_2 ADALAH KERJA YANG DILAKUKAN OLEH GAYA F(X) YANG MENGAKIBATKAN PERPINDAHAN BENDA DARI x_1 KE x_2

Karena di sini besar gaya berubah dengan tempat, kerja yang dilakukan untuk memindahkan benda dari x_1 ke x_2 tidaklah sama dengan $(x_2 - x_1)$ F, karena harga gaya F berubah antara x_1 dan x_2.
Akan tetapi untuk selang jarak x yang kecil sekali, gaya F(x) dapat dianggap konstan. Guna menghitung kerja yang dilakukan oleh gaya F dari x_1 ke x_2, selang antara x_1 dan x_2 kita bagi dalam N interval yang kecil. Untuk pergeseran yang terjadi dalam setiap interval ini, gaya dianggap tidak berubah.
Harga N kita buat cukup besar, sehingga dalam setiap interval perpindahan yang terjadi cukup kecil, sehingga selama perpindahan ini gaya F(x) dapat dianggap konstan. Dalam perpindahan Δx_i yang terjadi waktu benda berada di x_i, kerja yang dilakukan pada benda adalah

$$\Delta W_i = F(x_i)\ \Delta x_i \qquad (4\text{-}9)$$

Persamaan (4-9) tidak lain adalah luas interval yang diarsir pada Gb. 4-7(a). Jelas bahwa kerja yang dilakukan pada benda agar pindah dari x_1 ke x_2 adalah jumlah kerja yang dilakukan dalam setiap interval.

$$\text{Jadi } W(x_1 \rightarrow x_2) = \sum_{x_1,\ i=0}^{x_2,\ i=N} F(x_i)\ \Delta x_i \qquad (4\text{-}10)$$

Jika interval Δx_i dibuat mendekati nol, maka jumlah interval N akan menuju tak terhingga, dan indeks i menjadi kontinu. Dalam hal ini kerja yang dilakukan dapat ditulis sebagai

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = \lim_{\substack{x_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^{N} F(x_i)\, \Delta x_i$$

Jumlahan kontinu dapat ditulis sebagai integral, sehingga kita peroleh

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = \int_{x_2}^{x_1} F(x)dx \qquad (4\text{-}11)$$

Untuk menjumlahkan dengan indeks yang kontinu tanda Σ berubah menjadi $\int$. Kedua tanda ini adalah sama-sama menyatakan S, yang berarti "summation" atau penjumlahan. Persamaan (4-10) menyatakan bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya F(x) dalam memindahkan benda dari x_1 ke x_2 adalah sama dengan luas bagian di bawah kurva F(x) antara x_1 dan x_2.

Kerja oleh Gaya Pegas

Sebagai contoh, kita pandang sebuah pegas yang yang diikatkan pada sebuah tembok.
Jika dalam keadaan kendur panjang pegas adalah x_0, dan ujung yang satu diikat pada tembok, sedang ujung yang lain ditarik sehingga berada pada posisi x, maka gaya yang diperlukan adalah
$F = + k(x - x_0)$. Jika ujung yang bebas ini dihubungkan dengan suatu benda, pada benda ini akan ada gaya oleh pegas sebesar

$$F = - k(x - x_0) \qquad (4\text{-}12)$$

Ini sudah kita bahas dalam Bab 3
Jika titik asal koordinat kita ambil pada ujung bebas pegas dalam keadaan kendur, maka $x_0 = 0$ dan persamaan (4-12) dapat dituliskan sebagai

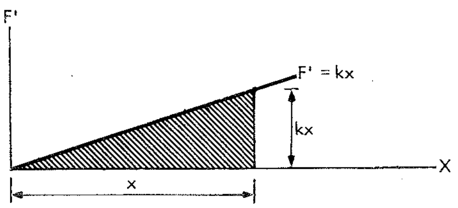
$$F = - kx$$

Ingat bahwa gaya di atas dilakukan *oleh pegas* pada kita. Gaya yang *kita* lakukan *pada* pegas, jika ujung pegas kita tarik adalah
$F' = + kx$.
Kerja yang kita lakukan waktu menarik ujung pegas dari x_1 ke x_2 adalah

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\ dx = \tfrac{1}{2}\, kx_2^2 - \tfrac{1}{2}\, kx_1^2$$

Jika kita ambil $x_1 = 0$ (pegas mulai dalam keadaan kendur) sampai $x_2 = x$ kita peroleh

$$W = \int_0^x kx\ dx = \tfrac{1}{2}\, kx^2$$



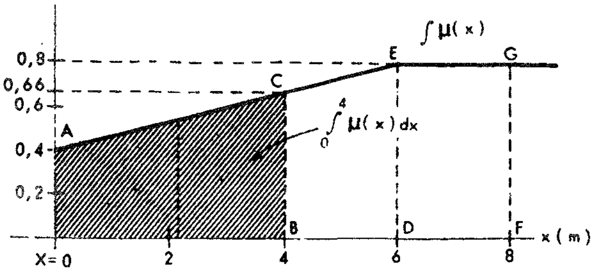
GB. 4.8. GAYA YANG DILAKUKAN PADA PEGAS YANG DIREGANGKAN ADALAH F' = KX. LUAS DI BAWAH KURVA (DIARSIR) MENYATAKAN KERJA YANG DILAKUKAN UNTUK MEREGANGKAN PEGAS DARI KEADAAN KENDUR SEJAUH x.

Kita juga dapat menentukan kerja yang dilakukan dengan menghitung luas daerah di bawah grafik (Gb. 4-8).
Dari Gb. 4-8 dapat kita tentukan bahwa luas daerah di bawah kurva antara 0 dan x adalah

$$A = \tfrac{1}{2}(kx)(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

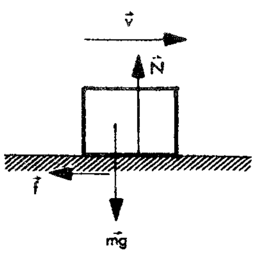
Contoh 4-4

Marilah kita bahas contoh berikut. Sebuah benda bermassa 8 kg meluncur pada suatu bidang datar dengan gesekan.



GB. 4-9 PERUBAHAN KOEFISIEN GESEKAN SEBAGAI FUNGSI x UNTUK CONTOH 4-4

Koefisien gesekan bidang tersebut berubah dengan posisi partikel. Bila grafik perubahan koefisien gesekan dengan posisi adalah seperti pada Gb. 4-9, tentukan energi yang hilang bila partikel bergerak dari $x = 0$ sampai dengan $x = 4$ m. Misalkan percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.



GB. 4-10 PERSOALAN UNTUK CONTOH 4-4

Jawab

Agar mudah membayangkan persoalannya, lihat Gb. 4-10.

Benda bergerak ke arah kanan, gaya yang melakukan kerja adalah gaya gesekan $\vec{F}$ arah ke kiri.

Dalam bentuk vektor gaya gesekan $\vec{F} = -\hat{i}\ f$ dan perubahan posisi benda dapat dinyatakan dengan $d\vec{r} = +\ \hat{i}\ dx$.

Bila perubahan posisi dx kita ambil sangat kecil, maka kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{f}$ dengan adanya perubahan posisi ini adalah

$$dW = \vec{f}\ .\ d\vec{r} = (-\hat{i}\ f).(+i\ dx) = -\ f\ dx.$$

Tanda negatif berarti transfer energi oleh kerja ini mengurangi energi benda. Ini masuk akal, sebab dengan adanya gaya gesekan laju benda berkurang, berarti energi benda juga berkurang.

Kerja yang dilakukan oleh gaya gesekan dari $x = 0$ sampai $x = 2$ m menjadi

$$W(x = 0 \rightarrow 2\text{ m}) = \int_0^2 -\ f(x)\ dx \qquad (4\text{-}13)$$

Akan tetapi $-f(x) = \mu(x)N = \mu(x)\ mg$; karena dalam persoalan ini gaya normal $N = mg$ (mengapa)?

Persamaan (4-13) menjadi

$$W(x)(0 \rightarrow 2\text{ m}) = -\int_0^2 \mu\ mg\ dx$$

$$= -\ mg \int_0^2 \mu(x)\ dx. \qquad (4\text{-}14)$$

Integral pada persamaan (4-14) dapat kita hitung bila bentuk fungsi $\mu(x)$ atau grafik $\mu(x)$ diketahui.

Dalam persoalan ini kita tahu grafik $\mu(x)$, dan integral $\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)\ dx$ tidak lain adalah luas daerah antara lengkungan $\mu(x)$ dengan sumbu x dari $x = x_1$ sampai $x = x_2$.

Dalam soal kita $x_1 = 0$ dan $x_2 = 2$ m, dan $\int_0^2 \mu(x)dx$ ditunjukkan sebagai luas bagian terarsir pada Gb. 4-8.

$$\int_0^2 \mu(x)dx = \text{luas trapesium OBCA}$$

$$= \frac{(OA + BC) \times (OB)}{2} = \frac{(0{,}40 + 0{,}66)(4m)}{2} = 2{,}06 \text{ m.}$$

Dengan memasukkan massa benda m = 2 kg, dan tetapan gravitasi g = 10 m/det^2, kerja yang dilakukan gaya gesekan dari x = 0 sampai x = 2 m adalah

$$W(0 \rightarrow 2 \text{ m}) = - \int f(x)\ dx = - mg \int_0^2 \mu(x)\ dx$$

$$= - (2 \text{ kg})(10 \text{ m/det}^2)(2{,}06 \text{ m}) = 41{,}2 \text{ joule}$$

Energi yang hilang dalam perjalanan ini tidak lain sama dengan kerja oleh gaya gesekan ini, yaitu sebesar 41,2 joule.
Energi ini digunakan untuk memanaskan benda dan lantai.

Kerja Sebagai Integral Garis

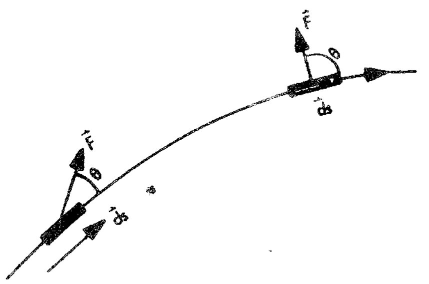
Di atas telah kita bahas kerja yang dilakukan oleh suatu gaya pada benda jika benda bergerak pada garis lurus, dan besar gaya berubah, sedang arahnya tetap. Dalam keadaan yang lebih umum, gaya $\vec{F}$ dapat berubah arah maupun besar, dan benda mungkin bergerak pada garis lengkung. Untuk menghitung kerja yang dilakukan kita harus mengetahui sudut Θ antara gaya $\vec{F}$ dan vektor pergeseran $\vec{ds}$ pada *setiap titik* dari lintasan. Pada umumnya kerja yang dilakukan oleh gaya F sehingga terjadi pergeseran ds adalah

$$d\ W = \vec{F}.\vec{ds} = F \cos \Theta\ ds \qquad (4\text{-}15)$$

Kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ pada benda yang bergerak dengan lintasan C dapat ditulis sebagai

$$W = \int_C \vec{F}.\vec{ds} \qquad (4\text{-}16)$$

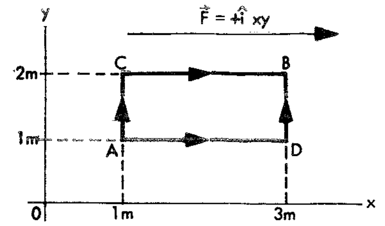
dengan $\vec{ds}$ adalah vektor perpindahan pada lintasan C. Gaya $\vec{F}$, $\vec{ds}$, dan lintasan partikel ditunjukkan pada Gb. 4-11. Integral di atas disebut *integral garis*, dan untuk lebih jelas akan kita bahas satu contoh pemakaian.



GB. 4-11 $\vec{F}$ DAN $\vec{ds}$ DAPAT BERUBAH SEPANJANG LINTASAN. PERHATIKAN BAHWA $\vec{ds}$ SELALU PADA ARAH KECEPATAN GERAK BENDA $\vec{V} = \vec{ds}/dt$

Contoh 4-5

Suatu ruang dikatakan memiliki *medan gaya,* bila pada *tiap* titik di dalam ruang tersebut suatu benda mendapat gaya. Gaya gravitasi bumi adalah suatu medan gaya karena di mana pun benda ditempatkan tak jauh dari bumi, benda selalu dipengaruhinya.
Misalkan dalam suatu ruang berlaku medan gaya dengan fungsi $\vec{F} = + \hat{i} \times y$.
Dalam ruang tersebut benda bergerak dari A ke B melalui dua jalan seperti pada Gb. 4-12. Gerak benda ini terjadi di bawah pengaruh gaya medan di atas.



GB. 4.12. SEBUAH PARTIKEL BERGERAK DARI A KE B DI BAWAH PENGARUH GAYA MEDAN $\vec{F} = +\hat{i}\,xy$

Marilah kita hitung kerja yang dilakukan oleh gaya medan untuk memindahkan partikel lewat jalan ACB dan lewat jalan ADB.

Jawab:
Karena besar dan arah gaya berubah jika kita bergerak sepanjang lintasan, kita harus menggunakan persamaan (4-14) untuk menghitung kerja yang dilakukan.

Kerja yang dilakukan oleh gaya medan untuk memindahkan benda dari A ke B lewat jalan ACB, adalah

$$W(ACB) = \int_{ACB} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{AC} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{CB} \vec{F}.d\vec{r}$$

Kita hitung lebih dahulu *integral garis* $\int_{AC} \vec{F}.d\vec{r}$ lewat garis AC seperti pada Gb. 4-12. Dalam menghitung integral garis seperti ini, kita harus ingat bahwa *elemen vektor perpindahan $d\vec{r}$ diambil sepanjang garis integrasi garis AC.*
Hal ini berarti $d\vec{r} = \hat{j}\,dy$. Selanjutnya fungsi $\vec{F}(x,y)$ juga harus *diambil untuk harga-harga x dan y sepanjang garis integrasi* (garis AC). Sepanjang garis integrasi AC ini variabel x mempunyai harga x = + 1m, sedang variabel y dapat mempunyai harga dari y = 1m sampai dengan y = 2m.
Sekarang dapatlah kita hitung kerja W sepanjang garis AC oleh gaya $\vec{F}(x,y) = +\hat{j}\,xy$, yaitu

$$W(AC) = \int_{AC} \vec{F}.d\vec{r} = \int_1^2 \hat{i}(y)(1).\hat{j}\,dy = 0$$

karena $\hat{i}\,.\,\hat{j} = 0$, berhubung vektor-vektor satuan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ saling tegak lurus. Dalam integral di atas telah digunakan kenyataan bahwa sepanjang garis AC, x = 1m, $d\vec{r} = \hat{j}\,dy$, dan y berubah dari y = 1m sampai dengan y = 2m.
Selanjutnya kita hitung kerja yang dilakukan gaya $\vec{F} = \hat{i}\,xy$ sepanjang garis BC, yaitu integral garis

$$W(BC) = \int_{BC} \vec{F}.d\vec{r}$$

Sepanjang garis BC $d\vec{r} = \hat{i}\,dx$, $\vec{F} = \hat{i}\,xy = \hat{i}\,x(2)$, karena sepanjang garis ini y = 2m. Variabel x boleh mempunyai harga dari x = 1m sampai x = 3m, sehingga batas integral adalah seperti di bawah

$$W(BC) = \int_{BC} \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_1^3 \hat{i}\,x\,(2).\hat{i}\,dx$$

$$= 2\int_1^3 x\,dx = (2)(\tfrac{1}{2})x^2 \Big/_1^3 = (3)^2 - (1)^2 = 8 \text{ joule}$$

Jadi kerja oleh gaya $\vec{F}$ dari A ke B lewat jalan ACB adalah

$W(ACB) = W(AC) + W(BC) = 8$ joule.

Dengan cara seperti di atas silahkan anda hitung sendiri, kerj oleh gaya $\vec{F} = \hat{i}xy$ dari A ke B lewat jalan ADB.
Akan anda peroleh bahwa

$W(ADB) = 4$ joule.

Di sini nyata bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F} = \hat{i}xy$ *bergantung pada jalan* yang diambil. Di belakang akan kita jumpai gaya medan yang bersifat istimewa. Kerja yang dilakukan oleh gaya ini, atau melawan gaya medan ini, *tidak* bergantung pada jalan yang diambil. Medan gaya seperti ini dikatakan bersifat *konservatif*. Dalam contoh kita medan gaya $\vec{F} = \hat{i}\,xy$ jelas tak bersifat konservatif.
Sekarang kembali pada contoh kita. Marilah kita hitung kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F} = \hat{i}\ xy$ untuk membawa benda dari A kembali ke A lagi lewat jalan ACBDA.
Kita tuliskan

$$W(ACBDA) = \oint_{ACBDA} \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{ACB} \vec{F}.\,d\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F}.\,d\vec{r}$$

Tanda $\oint$ menyatakan integral sepanjang lengkungan tertutup. Integral $\int_{BDA} \vec{F}.\,d\vec{r} = -\int_{ADB} \vec{F}.\,d\vec{r} = -4$ joule, sedang

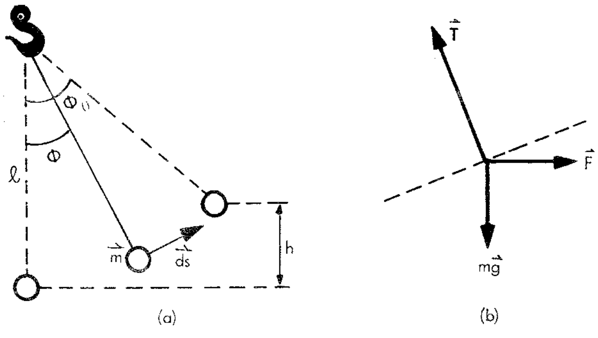
integral $\int_{ACB} \vec{F}.\,d\vec{r} = 8$ joule.

Jadi kerja yang dilakukan sepanjang lengkungan tertutup ACBDA, yaitu

$W(ACBDA) = 8$ joule $+ (-4)$ joule $= +4$ joule.

Hasil di atas menyatakan bahwa setelah bergerak dari A melalui ACBDA, dan kembali ke A lagi, benda mendapat *tambahan* energi sebesar 4 joule. Apabila hasil integral tertutup adalah negatif, maka energi benda berkurang setelah bergerak dalam lengkungan tertutup.
Gaya tak konservatif yang terakhir dikatakan *bersifat disipatif*.

Contoh 4-6
Sebagai suatu contoh lain, kita pandang suatu partikel dengan massa m yang digantungkan pada ujung seutas tali tanpa berat dengan panjang l. Ini disebut ayunan sederhana (Gb. 4-13).



GB. 4-13 (A) AYUNAN SEDERHANA. SEBUAH MASSA m DIGANTUNG PADA TALI DENGAN PANJANG l. SIMPANGAN MAKSIMUM ADALAH Φ_0.
(B) DIAGRAM GAYA BENDA UNTUK MASSA M

Sekarang kita lakukan gaya $\vec{F}$ yang selalu horizontal, sehingga massa m bergerak pada busur lingkaran dengan jejari ℓ dari $\phi = 0$ sampai ke $\phi = \phi_0$. Kita dapat melakukan gaya seperti ini dengan menarik massa dengan seutas tali yang diusahakan selalu horizontal. Akibatnya partikel akan berubah posisi vertikalnya sebesar h. Pada Gb. 4-13(b), ditunjukkan diagram gaya-gaya yang bekerja pada m. Gaya $\vec{T}$ adalah gaya

tarik tali, $m\vec{g}$ adalah berat benda, dan $\vec{F}$ gaya horizontal yang kita lakukan.
Kemudian kita anggap bahwa selama gerak ini tidak ada percepatan, jadi dalam kenyataannya gerak ini haruslah sangat perlahan. Gaya $\vec{F}$ selalu pada arah horizontal, akan tetapi pergeseran ds terletak pada suatu busur. Arah $\vec{ds}$ bergantung pada harga ϕ dan menyinggung lingkaran pada setiap titik. Gaya F akan berubah besarnya sedemikian rupa sehingga selalu mengimbangi komponen horizontal dari gaya tarik $\vec{T}$.
Dari hukum I kita peroleh
$mg = T\cos\phi$ dan $F = T\sin\phi$
Dengan menghilangkan T dari kedua persamaan di atas, kita peroleh
$F = mg\,tg\,\phi$.
Kerja yang dilakukan untuk perpindahan $\vec{ds}$ adalah

$$dW = \vec{F}.\vec{ds} = (mg\,tg\,\phi)(\cos\phi)ds$$
$$= mg\sin\phi\,ds.$$

Perhatikan bahwa sudut antara $\vec{ds}$ dan $\vec{F}$ adalah ϕ. Untuk menghitung kerja pada perpindahan dari $\phi = 0$ sampai pada $\phi = \phi_0$, kita harus melakukan integrasi sepanjang lintasan. Pada lintasan ini kita mempunyai hubungan
$ds = \ell\, d\,\phi$
Sehingga kita peroleh

$$W = {}_c\int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} \vec{F}.\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi} mg\sin\phi\,ds$$

$$W = \int_0^{\phi_0} mg\sin\phi\,\ell\,d\,\phi = mg\ell(1-\cos\phi_0),$$

akan tetapi $h = \ell(1-\cos\phi_0)$, sehingga $W = mg\,h$.

4.4 DAYA

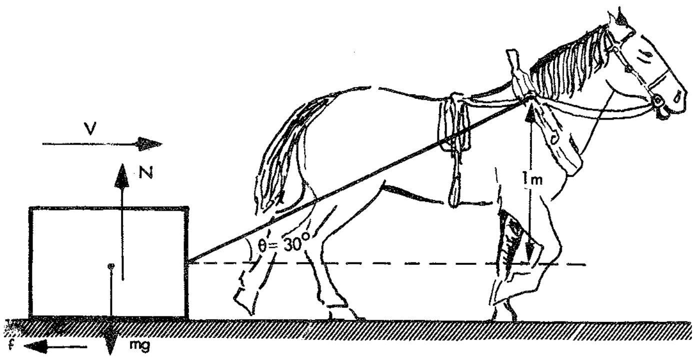
Sampai di sini kita belum memasukkan waktu yang diperlukan untuk melakukan kerja, atau berapa cepat transfer energi dari pelaku gaya ke benda pada mana gaya bekerja. Kerja yang dilakukan untuk mengangkat suatu benda melalui ketinggian tertentu adalah sama, apakah dikerjakan dalam waktu satu detik atau dalam satu tahun. Seringkali berapa cepat kerja dilakukan lebih menarik dari kerja total yang dilakukan.
Kita definisikan *daya* sebagai jumlah kerja yang dilakukan per satuan waktu. *Daya rata-rata* yang diberikan pada suatu benda adalah kerja total yang dilakukan pada benda tersebut dibagi dengan waktu total yang dipergunakan untuk melakukan kerja tadi, jadi
$\overline{P} = W/t$
Daya sesaat yang diberikan adalah

$$P = dW/dt$$
$$= \vec{F}.\frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad (4\text{-}17)$$

Jika daya besarnya tetap, maka $\overline{P} = P$, dan $W = P\,t$

Dalam sistem satuan mks, satuan daya adalah joule/detik, yang disebut *watt*. Satuan ini diambil dari nama James Watt, yaitu orang yang menemukan motor uap. Dalam sistem satuan Inggris, satuan daya adalah ft-lb/det^2. Satuan ini terlalu kecil untuk pemakaian sehari-hari, sehingga orang mempergunakan satuan yang lebih besar, yaitu *tenaga kuda* {*horse power, (hp)*}. James Watt sendiri menyarankan daya yang diberikan oleh seekor kuda sebagai satuan daya.
Satu 1 hp dipilih mempunyai harga 550 ft-lb/det. Atau satu tenaga kuda adalah kira-kira sama dengan 746 watt.
Kerja juga dapat dinyatakan dalam satuan daya x waktu, misalnya dalam *kilowatt-jam*. Satu kilowatt-jam adalah kerja yang dilakukan oleh suatu sistem yang bekerja dengan daya konstan 1 kilowatt selama satu jam.

Contoh 4-7
Marilah kita bayangkan satu contoh fisis pengertian daya sebesar satu daya kuda.
Seekor kuda berlari menarik sekarung beras bermassa 100 kg. Koefisien gesekan antara karung beras dan jalan 0,6. Berapa cepat kuda harus berlari dengan laju tetap agar melakukan kerja dengan daya sebesar satu daya kuda? Misalkan tinggi kuda dan panjang tali adalah seperti pada Gb. 4-14.



GB. 4-14

Jawab

Karena laju tetap, maka $\Sigma\vec{F} = 0$, berarti $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$.
Kita peroleh

$T_x = f$

$T_y + N = mg.$

sedang $T_y = T_x \text{ tg } 30°$

dan $f = \mu N$

selanjutnya kita dapatkan

$T_x = \mu N$

$T_x \text{ tg } 30° + N = mg$

sehingga $T_x \text{ tg } 30° + \dfrac{T_x}{\mu} = mg$

$$\text{atau } T_x = \frac{mg}{\left(\text{tg } 30° + \frac{1}{\mu}\right)} = \frac{(100 \text{ kg})(10\text{mm/det}^2)}{(0,58 + 1,67)}$$

$$= 444 \text{ newton}$$

Kuda melakukan kerja dengan komponen gaya T_x, sehingga daya yang dilakukan adalah $P = F\,v$.
Bila daya P = 1 hp = 745 watt, maka

$$v = \frac{745 \text{ watt}}{444 \text{ newton}} = 0,75 \text{ m/det}^2 = 51 \text{ km/jam}$$

Kesimpulan kita, seekor kuda tak akan dapat lama bertahan mentransfer energi dengan laju sebesar satu daya kuda.
Pada contoh di atas benda mendapat transfer energi terus menerus dari kuda, akan tetapi laju tetap, berarti energi benda tidak bertambah. Bagaimana ini dapat terjadi?

Contoh 4-8

Sebuah mobil mempergunakan daya 100 hp, dan bergerak dengan kecepatan 36 km/jam. Berapakah gaya dorongan mesin mobil?

Kecepatan $v = 36 \text{ km/jam} = \frac{36000}{360} \text{ m/det} = 10 \text{ m/det}.$

$$P = \frac{W}{t} = Fv$$

$$F = \frac{P}{v} = \frac{100 \times 746}{10 \text{ m/det}} = 7460 \text{ newton}$$

4.5 ENERGI KINETIK

Misalkan sebuah gaya $\vec{F}$ melakukan kerja pada sebuah benda yang bergerak pada lintasan dengan lengkungan C, maka kerja yang dilakukan adalah

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{s}$$

dengan $d\vec{s}$ adalah vektor perpindahan pada lengkungan C. Dari hukum II Newton kita tahu bahwa

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dan dari definisi kecepatan sesaat $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, kita peroleh

$$d\vec{s} = \vec{v}\,dt$$

Jika ini kita masukkan ke dalam persamaan (4-18), kita akan peroleh

$$W = \int_1^2 m\,\frac{d\vec{v}}{dt}.\,\vec{v}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,\vec{v}.\,d\vec{v}$$

$$= \int_1^2 \tfrac{1}{2}\,m\,d(\vec{v}.\vec{v}) = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{v_1}^{v_2}$$

atau

$$W = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_1^2 \qquad (4\text{-}19)$$

Kerja yang dilakukan oleh gaya resultan pada benda memindahkan energi dari pelaku gaya kepada benda. Sebagai akibatnya, terjadi perubahan pada besaran $\frac{1}{2}\,m\,v^2$. Perubahan ini haruslah merupakan pertambahan atau pengurangan *energi* benda, karena kerja adalah suatu perpindahan energi. Jelas bahwa $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ adalah satu bentuk energi, *yaitu bentuk yang berhubungan dengan gerak*. Berhubung dengan ini, maka besaran $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ disebut *energi kinetik*, atau *energi gerak*. Persamaan (4-19) menyatakan bahwa kerja yang dilakukan pada sebuah benda akan menambah energi kinetik benda.

Energi kinetik biasanya dinyatakan dengan K, sehingga dapat dituliskan bahwa

$$W \text{ (dari gaya resultan)} = \int \vec{F}.d\vec{s} = K_2 - K_1 \doteq \Delta K \qquad (4\text{-}20)$$

Hubungan ini disebut *teorema kerja-energi.*

Contoh 4-9

Anggap gaya gravitasi adalah tetap untuk jarak yang tidak terlalu besar di atas permukaan bumi. Sebuah benda dijatuhkan dari keadaan diam pada ketinggian h di atas permukaan bumi. Berapakah energi kinetik benda tepat sebelum sampai ke tanah?

Pertambahan energi kinetik adalah sama dengan kerja yang dilakukan oleh gaya resultan yang bekerja pada benda. Gaya resultan ini adalah gaya gravitasi. Gaya ini besarnya tetap dan mempunyai arah sama dengan arah gerak benda, sehingga kerja oleh gaya gravitasi adalah

$$W = F.d = mg\ h \cos 0^\circ = mgh$$

Kecepatan awal benda, yaitu $v_0 = 0$, dan kecepatan akhir adalah v. Pertambahan energi kinetik, yaitu

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} mv^2$$

Dengan mempergunakan teorema energi-kerja kita peroleh

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = mgh$$

kecepatan benda tepat sebelum sampai di tanah adalah

$$v = \sqrt{2\ gh}$$

Contoh 4-10

Sebuah balok mempunyai berat 8.0 lb bergerak di atas suatu permukaan horizontal tanpa gesekan dengan laju 4.0 ft/det. Benda ini berhenti setelah menumbuk dan menekan sebuah pegas yang dipasang. Berapa jauhkah pegas tertekan jika konstanta pegas k = 0,25 lb/ft?

Energi kinetik balok adalah

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2}(w/g)v^2$$

Energi kinetik ini adalah sama dengan kerja yang dilakukan oleh benda tersebut waktu menekan pegas. Sedang kerja yang dilakukan untuk menekan pegas sejauh x dari keadaan kendur adalah

$$W = \tfrac{1}{2} k\ x^2$$

sehingga

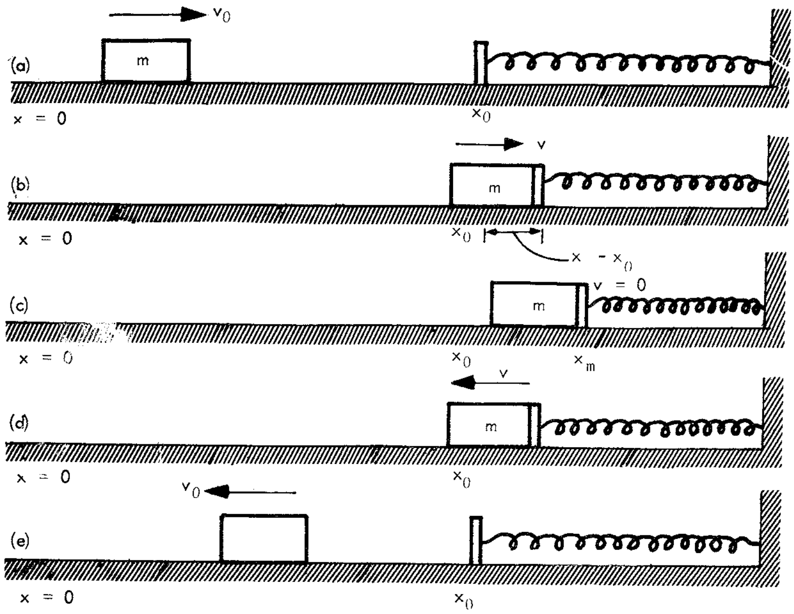
$$\tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2}(w/g)v^2, \text{ atau}$$

$$x = \sqrt{\frac{w}{gk}}\ v = \sqrt{\frac{(8.0)}{(32)(0,25)}}\ .\ 4 \text{ ft} = 4.0 \text{ ft}$$

4.6 ENERGI POTENSIAL PEGAS

Salah satu bentuk energi yang dapat dimiliki oleh sebuah benda adalah

energi yang berhubungan dengan gerak; energi ini disebut energi kinetik. Untuk sebuah benda yang bermassa m dan sedang bergerak dengan kecepatan v, energi ini mempunyai harga $K = \frac{1}{2} mv^2$. Pada keadaan ini jika benda tiba-tiba menumbuk pada benda lain, maka benda dengan energi kinetik ini akan mampu melakukan kerja, memindahkan sebagian energinya pada benda lain, dan menyebabkan benda lain tersebut bergerak. Jadi kita dapat katakan bahwa energi kinetik *menyatakan kemampuan melakukan kerja karena geraknya.*
Satu bentuk lain dari energi menyatakan kemampuan melakukan kerja karena posisi atau letak benda. Energi semacam ini disebut *energi potensial.* Pengertian energi potensial hanya dapat dihubungkan dengan beberapa macam gaya tertentu yang disebut *gaya konservatif.*
Agar mendapat gambaran lebih jelas, marilah kita bahas eksperimen berikut. Perhatikan Gb. 4-15.
Pada Gb. 4-15 ditunjukkan sebuah balok bermassa m meluncur di atas sebuah bidang datar yang licin sempurna menuju sebuah pegas. Balok bergerak dengan kecepatan tetap v_0, sedang massa pegas dianggap sama dengan nol. Balok menumbuk pegas dan menekan pegas, sampai akhirnya berhenti karena tertahan oleh gaya pegas. Selanjutnya benda m didorong kembali oleh pegas, dan waktu sampai posisi x_0, yaitu posisi pegas dalam keadaan bebas, balok mencapai kecepatan v_0 lagi dan terus meninggalkan pegas dengan kecepatan v_0.



GB. 4-15 (A) BENDA BERMASSA M BERGERAK DENGAN KECEPATAN v_0 MENUJU SEBUAH PEGAS TANPA MASSA YANG DIIKAT DI TEMBOK. APA YANG ERJADI SELANJUTNYA DILUKISKAN PADA GAMBAR (B) SAMPAI (E)

Marilah kita pandang kejadian di atas dari sudut transfer energi dan transformasi energi. Sebelum menumbuk pegas, balok mempunyai energi kinetik $K_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$. Setelah menumbuk pegas, kecepatan balok berkurang, dan akhirnya berhenti. Hal ini berarti balok kehilangan energi dengan berkurangnya energi kinetik, dan pada waktu balok berhenti energi kinetiknya sudah habis terpakai.
Pada waktu balok menekan pegas, balok melakukan gaya sebesar

$F' = + k(x - x_0)$

dan menyebabkan pergeseran pada ujung pegas. Jadi balok melakukan kerja mekanik, sehingga akhirnya energi habis dan balok berhenti. Banyaknya energi yang diambil dari balok dan diberikan kepada pegas sampai terjadi simpangan maksimum $(x_m - x_0)$ adalah

$$W = + \int_{x_0}^{x_m} k(x - x_0)dx = \tfrac{1}{2}k(x - x_0)^2 \Big|_{x_0}^{x_m}$$

$$W = \tfrac{1}{2}k(x_m - x_0)^2 \qquad (4\text{-}21)$$

dengan k adalah konstanta pegas.
Pada waktu balok berhenti karena dorongan pegas, seluruh energi kinetik yang dimiliki, yaitu $K_0 = \tfrac{1}{2} mv_0^2$, sudah dipindahkan ke dalam pegas lewat kerja yang dilakukan, yaitu

$$W = \tfrac{1}{2}k(x_m - x_0)^2.$$

Jadi haruslah

$$K_0 = \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \tfrac{1}{2}k(x_m - x_0)^2$$

Sekarang pertanyaannya, apa yang terjadi dengan energi yang diambil dari energi kinetik balok pada waktu balok melakukan kerja pada pegas. Setelah terhenti, seluruh energi balok sudah diberikan kepada pegas. Akan tetapi pada waktu itu pegas juga berhenti, jadi tampaknya tidak mempunyai energi. Sedang energi adalah sesuatu yang kekal, tidak dapat dimusnahkan. Jelas bahwa di sini terjadi suatu transformasi energi. Energi yang diterima dari balok *disimpan* di dalam pegas yang berada dalam keadaan tertekan. Energi simpanan ini disebut *energi potensial* pegas. Besar energi simpanan ini bergantung pada posisi balok, karena kerja yang dilakukan oleh balok juga bergantung pada posisi balok. Dengan menahan balok pada posisi ini pegas dapat menyimpan energi balok selama kita mau, dan kita dapat melepaskan energi simpanan ini dengan memutuskan penahannya.
Dipandang dari sudut pegas, energi yang *diterima dan kemudian* disimpan di dalam pegas haruslah sama dengan

$$W = + \int F'dx' \qquad (4\text{-}22)$$

yaitu kerja oleh gaya yang bekerja melawan dorongan pegas.
Energi tersimpan ini disebut *energi potensial*. Sehingga perubahan energi potensial pegas ΔU adalah

$$\Delta U = + \int F'dx \qquad (4\text{-}23)$$

dengan *F' adalah gaya yang melakukan kerja melawan pegas*. Untuk pegas yang mempunyai simpangan sebesar x dari keadaan setimbang, maka gaya yang melawan pegas adalah $F' = + kx$, sehingga energi potensial yang dimiliki pegas pada keadaan ini

$$U(x) = + \int_0^x F'dx = \tfrac{1}{2} kx^2 \qquad (4\text{-}24)$$

Energi potensial pegas seringkali juga dituliskan sebagai

$$U(x) = - \int_0^x F(x)dx, \qquad (4\text{-}25)$$

dengan F(x) adalah gaya yang dilakukan *oleh pegas* pada benda lain yang menekan atau menarik pegas. Gaya ini selalu *berlawanan* dengan simpangan pegas, sehingga gaya F(x) dapat dituliskan sebagai

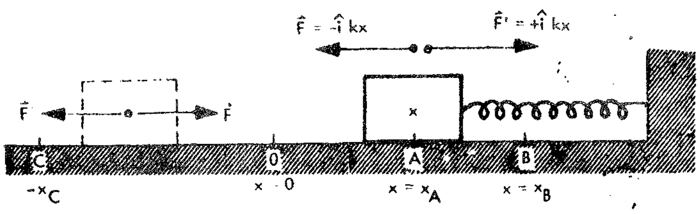
$$F(x) = -kx$$

dengan k adalah konstanta pegas. Akibatnya energi potensial pegas yang tertekan atau tertarik sejarak x dari keadaan bebas adalah

$$U(x) = -\int_0^x -k(x)\,dx = +\tfrac{1}{2}kx^2$$

seperti yang telah kita peroleh di atas.
Perhatikan bahwa di sini sudah terjadi perubahan bentuk energi, atau transformasi energi, yaitu dari energi kinetik menjadi energi potensial.
Kebalikan dari hal ini juga dapat terjadi, energi potensial pegas dapat berubah menjadi energi kinetik benda lagi. Setelah balok berhenti karena tertahan pegas, jika kita tunggu sebentar pegas akan mendorong balok ke kiri, pegas melakukan kerja memindahkan energi dari energi simpanannya, yaitu energi potensial, menjadi energi kinetik balok. Setelah pegas mencapai posisi bebasnya, balok akan bergerak dengan kecepatan v_0 lagi, seluruh energi kinetik balok sudah dikembalikan.
Pada contoh di atas, energi yang diterima pegas seluruhnya disimpan, dan seluruhnya dapat dikembalikan, tanpa ada energi yang hilang.
Karena energi yang ditransfer ke dalam pegas dapat diambil kembali oleh balok, maka kita dapat menganggap bahwa *energi potensial adalah milik balok* yang tersimpan di dalam pegas.

Sifat konservatif gaya pegas
Misalkan kita menekan atau menarik ujung pegas pada Gb. 4-16 dengan laju tetap. Jadi kita selalu menetralisir gaya pegas.



GB. 4-16 TITIK O MENYATAKAN POSISI SETIMBANG. GAYA DORONG F' = - F, GAYA OLEH PEGAS PADA BENDA

Gaya pegas $\vec{F} = -\hat{i}\,kx$ selalu kita imbangi dengan gaya $\vec{F}' = -\vec{F}$ agar laju benda tetap. Kerja yang kita lakukan mendorong benda dari 0 sampai A memindahkan energi dari kita sendiri kepada benda. Akan tetapi di sini laju benda tidak bertambah, sedang gesekan dengan lantai tidak ada. Kemana pergi energi yang kita berikan kepada benda?
Energi ini masuk ke dalam pegas, berubah bentuk, menjadi energi potensial. Energi potensial ini merupakan energi simpangan yang *hanya bergantung pada posisi benda saja, tidak bergantung pada jalan yang diambil untuk sampai pada posisi tersebut.*
Nyata bahwa pengertian energi potensial hanya berhubungan dengan gaya yang bersifat khusus. Kerja oleh gaya tersebut atau untuk menetralisir

gaya tersebut, dalam menggerakkan benda dari satu tempat ke tempat lain, tidak bergantung pada jalan yang diambil. Gaya seperti ini dikatakan bersifat *konservatif*.

Marilah kita periksa apakah betul gaya pegas bersifat konservatif. Perhatikan lagi Gb. 4-16. Posisi A dapat dicapai dengan berbagai cara. Kita dapat mulai dari O langsung ke A, atau dengan mengambil jalan OCA, atau OBA.

Marilah kita bandingkan kerja oleh gaya $\vec{F}' = -\vec{F} = -(-\hat{i}\ kx) = +\hat{i}\ kx$, untuk jalan OCA dan OA.

Kerja lewat OA adalah

$$W(OA) = \int_{OA} \vec{F}.d\vec{r}$$

Akan tetapi sepanjang OA $\quad d\vec{r} = +\hat{i}\ dx$, dan $\vec{F}' = +\hat{i}\ kx$, sehingga

$$W(OA) = \int_{OC}^{x_A} (\hat{i}\ kx).(\hat{i}\ dx) = \tfrac{1}{2}\, k\, x_A^2$$

Kemudian kerja lewat OCA

$$W(OCA) = W(OC) + W(CA)$$

$$= \int_{OC} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{CA} \vec{F}.d\vec{r}$$

Sepanjang OC, elemen vektor $d\vec{r} = -\hat{i}\ dx$, dan $\vec{F}' = -\hat{i}\ kx$ (lihat Gb. 4-16), sedang variabel x boleh berubah dari 0 sampai X_C.

$$W(OC) = \int_{O}^{x_C} (-\hat{i}\ kx).(-\hat{i}\ dx) = +\ \tfrac{1}{2}\, k\, X_C^2$$

Tanda positif menyatakan bahwa untuk menarik pegas kita juga perlu menggunakan energi, seperti halnya menekan pegas.

Selanjutnya, sepanjang CA gaya $\vec{F}'$ berubah arah, dari C ke O $\ \vec{F}' = -\hat{i}\ kx$, sedang dari O ke A $\ \vec{F}' = +\hat{i}\ kx$ Akan tetapi dari C ke A elemen vektor $d\vec{r} = +\hat{i}\ dx$ (tidak berubah arah).

Kerja sepanjang CA adalah

$$W(CA) = W(CO) + W(OA)$$

$$= \int_{O}^{x_C} (-\hat{i}\ kx).(+\hat{i}\ dx) + \int_{O}^{x_A} (+\hat{i}\ kx).(+\hat{i}\ dx)$$

$$= -\ \tfrac{1}{2}\, kx^2 \Big/_{O}^{x_C} + \tfrac{1}{2}\, kx^2 \Big/_{O}^{x_A}$$

$$= -\ \tfrac{1}{2}\, k\, X_C^2 + \tfrac{1}{2}\, k\, X_A^2$$

Jadi kerja sepanjang OCA adalah

$$W(OCA) = W(OC) + W(CA)$$

$$= +\ \tfrac{1}{2}\, k\, X_C^2 - \tfrac{1}{2}\, k\, X_C^2 + \tfrac{1}{2}\, k\, X_A^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, k\, X_A^2 = W(OA)$$

Nyata bahwa kerja yang diperlukan untuk sampai pada posisi A tidak bergantung pada jalan yang ditempuh. Jadi *gaya pegas bersifat konser-*

vatif. Kita akan bertemu dengan beberapa gaya konservatif lain, seperti gaya medan gravitasi dan gaya medan listrik.
Untuk tiap gaya konservatif ini, dapat didefinisikan energi potensial. Satu contoh gaya tak konservatif ialah gaya gesekan. Kerja yang dilakukan menetralisir gaya ini bergantung pada jalan yang diambil. Energi yang diberikan untuk mendorong benda dengan laju tetap, hilang terbuang menjadi energi getaran molekul atau atom dalam benda dan lantai. Energi ini tidak dapat diambil kembali.
Sifat konservatif suatu gaya juga dapat diperiksa dengan cara yang sedikit berbeda. Suatu gaya bersifat konservatif bila kerja yang dilakukan oleh gaya tersebut untuk menggerakkan benda dalam suatu lintasan tertutup, kembali ke tempat asal, sama dengan nol. Secara matematik dinyatakan, suatu gaya bersifat konservatif bila

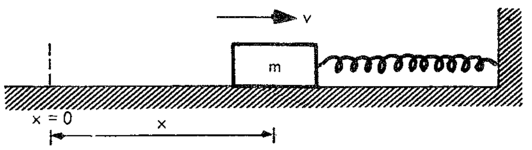
$$\oint_c \vec{F}.d\vec{r} = 0$$

Dalam contoh di atas (Gb. 4-16)

$$W(AOCA) = W(CO) + W(COA)$$
$$= -W(OA) + W(COA)$$
$$= -\tfrac{1}{2}k X_A^2 + \tfrac{1}{2}k X_A^2 = 0$$

Arti fisis dari pernyataan di atas adalah sebagai berikut. Jika suatu benda bergerak dari suatu tempat melalui suatu lintasan tertutup kembali ke tempat tersebut, energi yang diperoleh dari gaya konservatif adalah nol. Pada akhir gerak, benda kembali memiliki energi awalnya. Energi yang diperoleh pada satu bagian lintasan, dibuang lagi pada bagian lain dari lintasan tertutup.
Sekarang jelaslah makna istilah konservatif. Kata konservatif berasal dari kata Inggris 'to conserve', yang berarti menyimpan. Energi yang diberikan melawan gaya konservatif berubah bentuk menjadi energi simpanan, yaitu menjadi energi potensial.
Energi ini seluruhnya dapat diambil kembali. Gaya gesekan bersifat tak konservatif, energi yang diberikan pada benda melawan gaya gesekan hilang, tidak dapat diminta lagi. Gaya gesekan dikatakan bersifat *disipatif*.

Kekekalan Energi Mekanik
Sekarang kita bahas energi sebuah benda yang *diikat* pada sebuah pegas dan bergerak di bawah pengaruh pegas (Gb. 4-17).



GB. 4-17 SEBUAH BENDA YANG DIIKAT PADA SEBUAH PEGAS AKAN MELAKUKAN GERAK HARMONIK (SELARAS)

Sebuah balok dengan massa m diikat pada sebuah pegas, bergerak di atas bidang datar yang licin sempurna. Pegas ditekan sehingga tertekan sejauh x_m dari keadaan bebas (x = 0). Jika pegas dilepaskan maka balok akan melakukan gerak harmonik (selaras), yaitu suatu gerak periodik di sekitar titik x =0.
Persamaan gerak balok, yaitu x(t), dapat ditentukan dari hukum II Newton,

yaitu

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi_0) \qquad (4\text{-}27)$$

dengan ω adalah frekuensi sudut osilasi, dan mempunyai harga

$$\omega = \sqrt{(k/m)}$$

Laju balok pada saat t adalah

$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi_0) = -v_m \sin(\omega t + \phi_0)$, dengan v_m adalah kecepatan maksimum balok, sehingga energi kinetik balok adalah

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2}/mx_m^2 \ \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \qquad (4\text{-}28)$$

$$= \tfrac{1}{2} x_m^2 k \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

Energi potensial balok adalah

$$U = \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \qquad (4\text{-}29)$$

Jika persamaan (4-27) kita jumlahkan dengan persamaan (4-28), kita akan peroleh

$$K + U = \tfrac{1}{2} kx_m^2 \{\sin^2(\omega t + \phi_0) + \cos^2(\omega t + \phi_0)\} = \tfrac{1}{2} kx_m^2 \qquad (4\text{-}30)$$

Tampak bahwa jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah tetap, tidak bergantung pada waktu. Jumlah kedua energi ini disebut *energi mekanik total E*. Jadi untuk benda yang bergerak di bawah pengaruh gaya pegas dapat dituliskan

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \text{konstan}$$

Waktu x mencapai x_m, $v = 0$, sehingga $E = \tfrac{1}{2} kx_m^2$. Sedang waktu $x = 0$, v mencapai kecepatan yang maksimum, yaitu v_m sehingga

$$E = \tfrac{1}{2} kx_m^2 = \tfrac{1}{2} mv_m^2$$

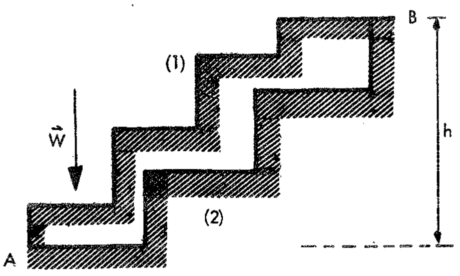
Sekali lagi dapat dikatakan bahwa jika gaya yang bekerja pada benda hanyalah gaya pegas, maka energi mekanik total benda besarnya tetap, tidak bergantung pada waktu ataupun posisi benda. Pernyataan ini dikenal sebagai hukum *kekekalan energi mekanik total.*

Hukum ini berlaku lebih umum, yaitu *selama semua gaya yang bekerja pada benda adalah gaya konservatif*, sehingga kerja yang dilakukan oleh gaya ini merubah energi kinetik benda menjadi energi simpanan yang dapat diambil kembali oleh benda tersebut. Jika ada gaya disipatif, maka sebagian energi simpanan ini akan dipergunakan untuk maksud lain, yaitu sebagai kalor, atau merubah posisi atom-atom di dalam bahan, sehingga tidak seluruh energi simpanan dapat diambil kembali oleh benda. Dalam hal seperti ini, energi *mekanik* total tidaklah kekal, akan tetapi jika energi yang hilang diperhitungkan, maka seluruh energi akan kekal.

Sekarang marilah kita bahas sebuah gaya konservatif yang lain, yaitu gaya gravitasi.

4.7 ENERGI POTENSIAL GRAVITASI (dekat permukaan bumi)

Marilah kita bahas satu eksperimen sederhana. Perhatikan Gb. 4-18.

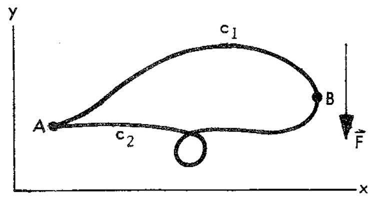


GB. 4-18 SEORANG MEMBAWA BARANG MELALUI DUA BUAH TANGGA YANG MENGHUBUNGKAN DUA TEMPAT

Misalkan anda membawa sepotong besi bermassa 50 kg dari A ke B. Gaya berat besi ini adalah selalu pada arah vertikal ke bawah. Dengan menganggap bahwa gaya gravitasi dekat permukaan bumi adalah konstan, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa kerja yang diperlukan melawan gaya berat ini untuk membawa besi dari A ke B hanya bergantung pada beda tinggi h, dan tidak bergantung pada jalan yang diambil. Jadi jika anda hitung kerja yang dilakukan lewat tangga (1), adalah W_1 = mgh, dan kerja yang dilakukan lewat tangga (2), adalah W_2 = mgh juga.

Jadi kerja W untuk membawa benda dari A ke B hanya bergantung pada posisi-posisi awal dan akhir saja, tidak bergantung pada bagaimana dan mana jalan yang diambil untuk melakukan kerja tersebut.

Secara lebih umum dapat ditunjukkan bahwa karena pengaruh gaya gravitasi *dekat permukaan bumi*, dimana *besar* dan *arah* gaya ini dapat dianggap tidak berubah dari satu tempat ke tempat lain, kerja yang di dilakukan melawan gaya ini untuk memindahkan sebuah benda dari satu tempat ke tempat lain tidak bergantung pada jalan yang diambil (Gb. 4-19). Misalkan gaya yang harus dilakukan *melawan gaya* gravitasi adalah $\vec{F}' = -\vec{F} = +\hat{k}\,mg$.



GB. 4-19 KERJA YANG DIPERLUKAN MELAWAN GAYA GRAVITASI UNTUK MEMINDAHKAN BENDA DARI A KE B TIDAK BERGANTUNG PADA JALAN YANG DITEMPUH

Secara matematika dapat ditunjukkan bahwa kerja melawan gaya gravitasi

$$W_{A-B} = \int_{A,c_1}^{B} \vec{F}'.\vec{ds} = \int_{A,c_2}^{B} \vec{F}'.\vec{ds} \qquad (4\text{-}31)$$

Persamaan (4-31) dibaca sebagai berikut: integral garis $\vec{F}.\vec{ds}$ dari A ke B sepanjang c_1 sama dengan integral dari $\vec{F}.\vec{ds}$ dari A ke B sepanjang c_2.

Persamaan (4-31) dapat dituliskan sebagai

$$\int_{A,c_1}^{B} \vec{F}'.\vec{ds} - \int_{A,c_2}^{B} \vec{F}'.\vec{ds} = \int_{A,c_1}^{B} \vec{F}'.\vec{ds} + \int_{B,c_2}^{A} \vec{F}'.\vec{ds}$$

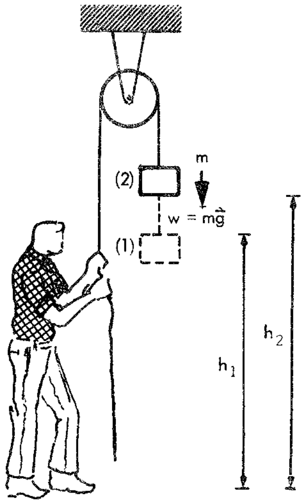
$$= \oint_{c} \vec{F}'.\vec{ds} = 0 \qquad (4\text{-}28)$$

Persamaan (4-32) menyatakan integral $\vec{F}.\vec{ds}$ pada setiap lengkungan tertutup adalah sama dengan nol.

Secara fisis hal ini berarti bahwa jika kita mulai dari A, memindahkan benda melalui lengkungan sebarang melawan gaya berat benda, dan akhirnya sampai di A lagi, maka kerja yang dilakukan, atau energi yang diterima benda setelah kembali ke tempat asal, sama dengan nol. *Jadi gaya gravitasi adalah gaya konservatif.*

Energi yang diberikan kepada benda dalam melawan gaya gravitasi tidak-

lah hilang, akan tetapi disimpan sebagai energi potensial, dan dapat seluruhnya diperoleh kembali.
Untuk suatu konservatif $\vec{F}$, kita dapat mendefinisikan *beda energi potensial* benda sebagai kerja yang dilakukan untuk memindahkan benda dari tempat (1) ke tempat (2), *melawan* gaya konservatif tersebut.



GB. 4-20 KERJA DILAKUKAN PADA BENDA BERMASSA m MELAWAN GAYA GRAVITASI w

Gaya yang diperlukan untuk melawan gaya konservatif tersebut adalah $\vec{F}' = -\vec{F}$, sehingga jika U(1) adalah energi potensial di tempat (1), dan U(2) adalah energi potensial di tempat (2), maka

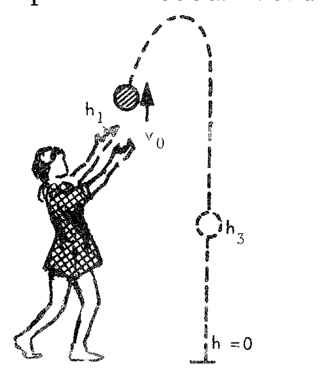
$$U(2)-U(1) = \int_{(1)}^{(2)} (-\vec{F}).d\vec{s} = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{s} \qquad (4\text{-}32)$$

dengan $\vec{F}$ adalah gaya gravitasi pada benda.
Jika U(2) > U(1) maka berarti bahwa kerja ini menambah energi simpanan benda. Energi ini diambil dari pelaku gaya yang melakukan kerja melawan gaya konservatif untuk memindahkan benda.
Misalnya anda menaikkan sebuah benda dari ketinggian h_1 ke h_2 dengan sebuah katrol, seperti terlihat pada Gb. 4-20, maka $\vec{F} = -mg\hat{k}$

dengan $\hat{k}$ adalah vektor satuan pada arah sumbu +z, dan $d\vec{s} = \hat{k}\, d\vec{z}$.
Sehingga

$$U(2) - U(1) = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} mg\, dz = mg(h_2 - h_1)$$

Tampak bahwa pada posisi (2) energi potensial benda adalah lebih besar dari energi potensial pada posisi (1). Hal ini berarti energi simpanan benda bertambah. Tambahan energi simpanan disebabkan oleh transfer energi dari pelaku kerja kepada benda tersebut. Energi simpanan ini dapat terus dipertahankan dengan mengikatkan tali pada sebuah tiang. Energi simpanan ini kemudian dapat dipergunakan untuk maksud lain dengan memutuskan tali.
Sekarang marilah kita lakukan suatu eksperimen yang sedikit lain. Kita lemparkan sebuah bola ke atas dan kemudian kita biarkan jatuh bebas.



GB. 4-21 SEBUAH BENDA DILEMPAR KE ATAS KEMUDIAN JATUH BEBAS

Dengan melempar bola ke atas, kita memberi energi kinetik pada bola. Setelah lepas dari tangan kita, bola bergerak di bawah pengaruh gaya gravitasi saja, dan berpindah tempat ke atas karena geraknya sendiri.
Siapakah pelaku gaya di sini?
Jelas bahwa gaya ini dilakukan oleh bumi pada bola.
Orang memandang peristiwa interaksi antara bumi dengan bola melalui suatu *medan gaya gravitasi*.
Orang membayangkan massa bumi sebagai sumber medan gravitasi bumi. Karena bumi mempunyai massa ruang di sekitar bumi mempunyai sifat menarik

benda lain di sekitarnya yang bermassa m dengan gaya
$\vec{F} = m\,\vec{g}$.
Jadi vektor percepatan gravitasi $\vec{g}$ dapat diartikan sebagai *kuat medan* gravitasi bumi. *Medan* adalah suatu besaran fisis yang mempunyai harga pada *setiap* titik dalam ruang. Suhu dalam suatu ruangan adalah suatu medan, karena mempunyai harga pada setiap titik dalam ruang. Karena suhu adalah besaran skalar, maka medan suhu adalah *medan skalar*. Medan gravitasi adalah sebuah *medan vektor*, sebab harga medan, yaitu gaya gravitasi, adalah suatu besaran vektor. Dengan pengertian medan gravitasi, kita dapat menyatakan bahwa setelah bola lepas dari tangan kita, bola ada di bawah pengaruh *medan* gravitasi saja. Pada waktu bola bergerak ke atas, medan gravitasi melakukan *kerja negatif pada* benda

$$W = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F}.\vec{ds} = +\int_{h_1}^{h_2} (-mg\hat{k}).(\hat{k}\ dZ) = -\ mg(h_2 - h_1)$$

Hal mana berarti bahwa energi kinetik benda berkurang, diambil oleh medan gravitasi menjadi energi simpanan. Jelas bahwa medan gravitasi bertindak sebagai pegas pada pasal terdahulu.
Akibatnya energi potensial benda bertambah dengan

$$\Delta U = U(2) - U(1) = -\ W = -\int_{(1)}^{(2)} F.ds = +\ mg(h_2 - h_1).$$

Kita dapat mengambil tempat sebarang, dan mendefinisikan tempat tersebut mempunyai energi potensial sama dengan nol. Dengan sendirinya ini berarti bahwa kita mengambil titik asal sumbu koordinat kita ($z = 0$) pada titik ini. Untuk mudahnya kita ambil $h = 0$ di tanah. Akibatnya, kita dapat katakan bahwa sebuah benda dengan massa m dan terletak pada tinggi h di atas tanah mempunyai energi potensial

$$U(h) = m\,g\,h \qquad (4\text{-}33)$$

Pada gerak ke bawah, energi simpanan dikembalikan pada benda sehingga energi kinetik benda bertambah terus, atau laju benda bertambah besar.

Hukum kekekalan energi mekanik.

Untuk gaya konservatif $\vec{F}$, $\int_A^B \vec{F}.\vec{ds}$ tidak bergantung pada jalan yang ditempuh, akan tetapi hanya bergantung pada posisi awal A dan posisi akhir B.
Energi potensial di B dan di A dapat didefinisikan sehingga

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}.\vec{ds}$$

dengan $\vec{F}$ adalah gaya *oleh* medan. Jika kita pergunakan hukum II Newton $\vec{F} = -\ m\,\vec{a}$, dan $\vec{ds} = \vec{v}dt$, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B m\,\frac{dv}{dt}.\vec{v}dt = -\int_A^B m\vec{v}.\vec{dv} = -\ (\tfrac{1}{2}\ mv^2)\Big/_{v_A}^{v_B}$$

$= - (\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2)$

Akhirnya kita peroleh

$$U_{(B)} + \tfrac{1}{2} mv_B^2 = U_{(A)} + mv_A^2 .$$

Karena $\frac{1}{2} mv_B^2$ tidak lain adalah energi kinetik benda di B, yaitu K(B), dan $\frac{1}{2} mv_B^2 = K(A)$, maka

$$U(B) + K(B) = U(A) + K(A) = E$$

Jadi energi *mekanik total* benda, yaitu jumlah energi kinetik dan energi potensial benda adalah konstan. Ini adalah pernyataan umum hukum *kekekalan energi mekanik total.*

4.8 ENERGI POTENSIAL GRAVITASI BUMI (umum)

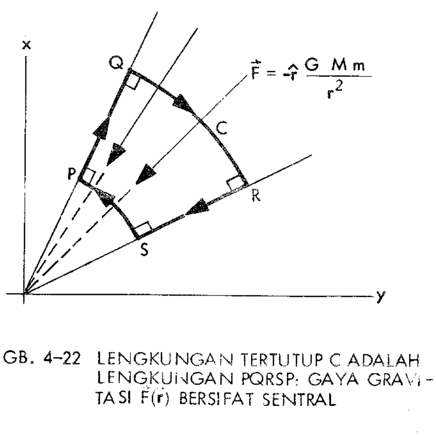
Jauh dari permukaan bumi, kita tidak dapat menganggap bahwa gaya gravitasi adalah konstan. Jika kita ambil pusat bumi sebagai titik asal sumbu kordinat, maka kita dapat nyatakan bahwa pada jarak r dari pusat bumi besar gaya gravitasi pada benda bermassa m adalah

$$F = G \frac{M_B m}{r^2} \qquad (4\text{-}34)$$

dengan M_B menyatakan massa bumi. Arah gaya gravitasi bumi adalah radial dan menuju pusat bumi.
Jika $\hat{r}$ menyatakan vektor satuan pada arah radial ke luar, maka dalam bentuk vektor persamaan (4-34) dapat ditulis sebagai

$$\vec{F} = - G \frac{M_B\, m}{r^2} \hat{r}$$

Satu hal yang menarik dengan bentuk fungsi gaya gravitasi adalah bahwa *gaya ini bersifat konservatif.* Dengan demikian kita dapat mendefinisikan energi potensial.



GB. 4–22 LENGKUNGAN TERTUTUP C ADALAH LENGKUNGAN PQRSP: GAYA GRAVITASI $\vec{F}(\vec{r})$ BERSIFAT SENTRAL

Sifat konservatif gaya gravitasi ini dapat dibuktikan dengan menujukkan bahwa

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) . d\vec{r} = 0$$

untuk tiap lengkungan integrasi C yang tertutup. Guna menunjukkan ini, perhatikan Gb. 4-22.
Dalam menghitung $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ sepanjang lengkungan tertutup C, lengkungan integrasi kita ambil berbentuk seperti pada Gb. 4-23 agar integral menjadi sederhana. Lengkungan integrasi C kita bagi menjadi lengkungan PQ, QR,

RS, dan SP, sehingga dapat dituliskan

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_{PQ} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{QR} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{RS} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{SP} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (4\text{-}35)$$

Dalam menghitung integral garis, perlu diingat bahwa $d\vec{r}$ harus diambil pada lengkungan integrasi.

Dalam menghitung $\int_{QR} \vec{F}.d\vec{r}$ dan $\int_{SP} \vec{F}.d\vec{r}$ gaya $\vec{F}$ berarah radial, sedang $d\vec{r}$ (pada QR atau SP) berarah tangensial (menyinggung busur lingkaran).

Ini berarti $\vec{F} \perp d\vec{r}$ untuk kedua lengkungan integrasi, sehingga $\vec{F}.d\vec{r} = 0$, dan kedua integral di atas sama dengan nol.

Persamaan (4-32) menjadi

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_{PQ} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{RS} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (4\text{-}36)$$

selanjutnya dalam menghitung $\int_{PQ} \vec{F}.d\vec{r}$ kita $\vec{F} = -\hat{r}\,\dfrac{G\,Mm}{r^2}$ dan $d\vec{r} = +\hat{r}\,d\vec{r}$, karena terletak pada PQ, dan integral menjadi

$$\int_{PQ} \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{r_P}^{r_Q} \left(-\hat{r}\,\frac{G\,Mm}{r^2}\right)(+\hat{r}\,dr) = -G\,Mm \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= -G\,Mm\left(-\frac{1}{r}\right)\Big/_{r_P}^{r_Q} = +G\,Mm\left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_P}\right)$$

dengan PQ = r.

Sekarang kita hitung integral $\int_{RS} \vec{F}.\,d\vec{r}$. Di sini $\vec{F} = -\hat{r}\,\dfrac{G\,Mm}{r^2}$, dan $d\vec{r} = -\hat{r}\,dr$ karena terletak pada RS, bidang batas integrasi harus diambil dari r_S ke r_P, (arah integrasi sudah diperhitungkan dengan mengambil $d\vec{r} = -\hat{r}\,d\vec{r}$) Integral menjadi

$$\int_{RS} \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{r_R}^{r_S} \left(-\hat{r}\,\frac{G\,Mm}{r^2}\right)(-\hat{r}\,d\vec{r})$$

$$= +G\,Mm \int_{r_R}^{r_S} \frac{1}{r^2}\,dr = -G\,Mm\left(\frac{1}{r}\Big/_{r_R}^{r_S}\right).$$

Karena $r_Q = r_S$ dan $P = r_R$, maka

$$\int_C \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{PQ} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{RS} \vec{F}.\,d\vec{r} = 0.$$

Hasil ini menyatakan bahwa gaya gravitasi $\vec{F} = -\hat{r}\,\dfrac{G\,Mm}{r^2}$ bersifat konservatif, dan kerja yang diperlukan untuk memindahkan suatu benda oleh gaya ini tak bergantung pada jalan yang diambil.

Arti fisis dari pernyataan $\oint_C \vec{F}.\,\vec{dr} = 0$ adalah sebagai berikut. Kita gerakkan benda dengan laju tetap melawan gaya gravitasi, melalui lintasan sebarang yang tertutup, setelah sampai posisi awal, maka kerja yang kita berikan pada benda adalah nol. Ini berarti bahwa benda tidak mendapat tambahan atau pengurangan energi setelah kembali ke posisi awal. *Inilah ciri gaya konservatif.*

Bila kita teliti kembali, nyata bahwa sifat konservatif gaya gravitasi berpangkal pada sifat bahwa arah gaya selalu menuju pusat dan besar gaya pada jarak tertentu dari pusat adalah sama untuk semua arah. Di katakan bahwa medan gaya gravitasi bersifat isotropik.

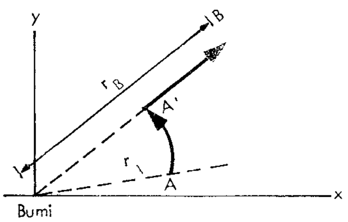
Energi potensial

Sekarang kita dapat mendefinisikan energi potensial gravitasi sebagai berikut. Jika U(A) adalah energi potensial pada tempat A, dan U(B) energi potensial di B.

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}.\,\vec{dr} \qquad (4\text{-}37)$$

dengan $\vec{F}$ adalah gaya *oleh* medan gravitasi.

Karena integral garis pada persamaan (4-37) tidak bergantung pada jalan yang diambil antara A dan B, maka kita ambil jalan AA'B (Gb. 4-23).



GB. 4-23 INTEGRAL $\int \vec{F}.\vec{ds}$ DAPAT DI AMBIL PADA LENGKUNGAN SEBARANG. UNTUK MUDAH NYA AMBIL LENGKUNGAN AA'B

dengan AA' adalah busur lingkaran berjejari r_A

$$\int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^{A'} \vec{F}.\vec{dr} + \int_{A'}^B \vec{F}.\vec{dr}$$

Karena untuk $\vec{dr}$ pada lengkungan AA', $\vec{F}$ tegak lurus $\vec{dr}$, dan $\vec{F}.\vec{ds} = 0$ maka

$\int_A^{A'} \vec{F}.\vec{dr} = 0$. Pada lengkungan A'B, $\vec{F}$ sejajar

$\vec{dr}$, sedang $\vec{dr} = r\,\vec{dr}$, sehingga

$$\int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_{A'}^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_{r_A}^{r_B} F\,dr$$

Jadi beda energi potensial menjadi

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = -\int_{A'}^B \vec{F}.\vec{dr} = -\int_{A'}^B \left(-G\frac{M_Bm}{r^2}\right)\hat{r}.\hat{r}\,dr$$

$$= +\,G\,M_Bm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$U(B) - U(A) = -\,G\,M_Bm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad (4\text{-}38)$$

Dalam melakukan integrasi $\int_A^B \vec{F}.\vec{dr}$, untuk $\vec{dr}$ yang terletak pada jejari A'B, kita telah menggunakan

$\vec{dr} = \hat{r}\,dr$.

Karena U(B) hanya bergantung pada posisi B, dan U(A) hanya bergantung pada posisi A, maka dari persamaan (4-38) dapat disimpulkan bahwa

$$U(B) = -\frac{GM_B m}{r_B} \quad \text{dan} \quad U(A) = -\frac{GM_B m}{r_B}$$

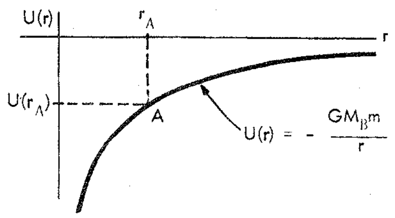
Pada umumnya, untuk benda bermassa m yang terletak di luar bumi, maka energi potensial gravitasi pada jarak r dari pusat bumi adalah

$$U(r) = -\frac{G\,M_B m}{r} \qquad (4\text{-}39)$$

Perhatikan bahwa energi potensial gravitasi mempunyai tanda negatif. *Hal ini berarti jika sebuah partikel bergerak di bawah pengaruh gaya gravitasi dari $\sim$ ke r, maka energi potensial akan berkurang, karena dipergunakan untuk menambah energi kinetik dengan makin besarnya laju partikel waktu bergerak mendekati bumi.*
Jika mula-mula partikel berada di $r = \sim$ dengan energi sama dengan nol pelan-pelan dilepaskan dan tertarik oleh gaya gravitasi, maka dalam perjalanan mendekati bumi medan gravitasi merubah energi potensial men-menjadi energi kinetik. Pada waktu sampai di B energi kinetik benda, yaitu

$$K(B) = |U(B)| \qquad \text{atau} \qquad \tfrac{1}{2} m v_B^2 = \frac{GM_B m}{r_B}$$

Kurva energi potensial
Jika U(r) dilukiskan terhadap r kita akan mendapatkan Gb. 4-24.



GB. 4-24 ENERGI POTENSIAL GRAVITASI SEBUAH BENDA BERMASSA m YANG TERLETAK PADA JARAK r DARI PUSAT BUMI. (UNTUK r > JEJARI BUMI)

Untuk gaya sentral dengan bentuk umum

$$F \;\alpha\; \frac{1}{r^n}$$

gaya tarik menarik memberikan energi potensial *negatif*, sedang *gaya tolak menolak* memberikan energi potensial *positif*.
Dari definisi energi potensial, yaitu

$$U(r) = -\int_{r_a}^{r} \vec{F}.\vec{dr}$$

dengan r_a adalah tempat dengan $U(r_a) = 0$, kita dapat peroleh $\vec{F}$ dari hubungan

$$\vec{F}(r) = -\frac{d\,U}{d\,r}\,\hat{r} \qquad (4\text{-}40)$$

Jika kita gunakan persamaan (4-40) untuk energi potensial gravitasi, maka

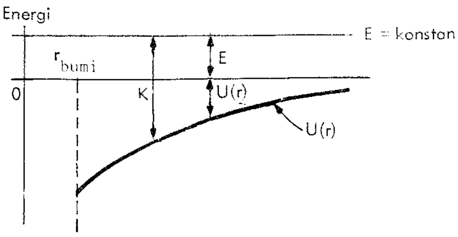
$$\vec{F} = -\hat{r}\,\frac{d}{dr}\left(-G\,\frac{M_B m}{r}\right)$$

$$\vec{F} = -G\,\frac{M_B m}{r^2}\,\hat{r}$$

Persamaan (4-40) hanya berlaku untuk hal khusus dimana U hanya bergantung pada r, dan tidak bergantung pada arah. Hukum kekekalan energi mekanik total berlaku untuk medan gravitasi umum, dan harganya adalah

$$E = K + U$$

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{GM_B m}{r}$$

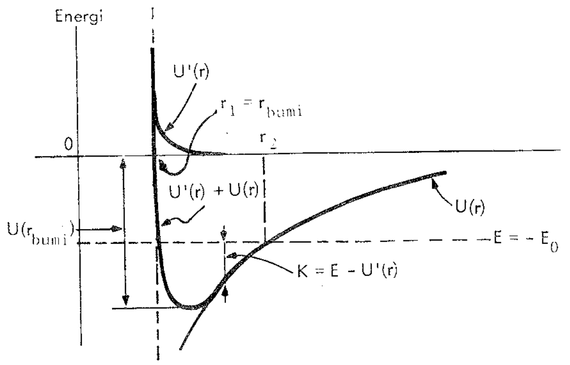


GB. 4–25 ENERGI KINETIK: K = E - U(r), E: ENERGI MEKANIK TOTAL, U(r): ENERGI POTENSIAL

Pada r = ∿ energi mekanik hanyalah berupa energi kinetik. Untuk gerak satu dimensi dalam arah radial, kita dapat membahas gerak benda dari sudut energi, dengan grafik energi potensial seperti pada Gb. 4-25.
Makin dekat ke bumi makin besar energi kinetik.
Kita semua tahu apa yang terjadi jika benda datang radial dari r = ∿ sampai pada permukaan bumi. Benda akan menumbuk tanah dan berhenti. Jadi tepat pada permukaan bumi benda mulai mendapat gaya tolak. Gaya tolak ini dapat dianggap mempunyai bentuk

$$F \propto \frac{1}{r^n}$$

dengan pangkat n yang besar.
Kita dapat lukiskan energi potensial dari gaya ini sebagai U'(r) yang mempunyai harga *positif* dan naik dengan r secara cepat sekali. Ini dilukiskan pada Gb. 4-26.



GB. 4-26 U'(r) ADALAH ENERGI POTENSIAL GAYA KONTAK BUMI, DAN U(R) ADALAH ENERGI POTENSIAL GRAVITASI. U'(r) + U(r) DILUKISKAN DENGAN GARIS TEBAL. TITIK r = 0 MENYATAKAN PUSAT BUMI

Kecepatan lepas
Dari Gb. 4-26 kita dapat memperoleh kesimpulan tentang *gerak lurus arah radial*. Jika energi mekanik total partikel adalah negatif, $E = -E_0$, maka energi kinetik benda akan positif selama benda berada antara r_1 dan r_2. Untuk $r < r_1$ atau $r > r_2$ energi kinetik benda adalah negatif; ini tidak mungkin terjadi sebab akan berarti bahwa kecepatan benda adalah bilangan imajiner.

Sebuah peluru yang dilemparkan lurus ke atas pada jejari $r_1 = r_{bumi}$ hanya dapat naik sampai r_2, pada waktu mana energi kinetik benda sama dengan nol, kemudian akan kembali lagi ke r.
Jika benda dilemparkan dari bumi dengan energi kinetik $K = |U(r_{bumi})|$ maka $E = K + U(r_{bumi}) = 0$. Dari Gb. 4-26, jika E kita ambil sama dengan nol, garis E = 0 akan memotong U(r) di tempat r = ∿. Hal ini berarti benda akan bergerak ke r = ∿, atau lepas dari bumi. Kecepatan

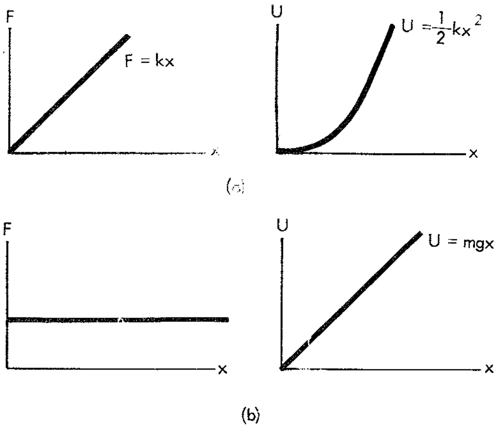
awal agar ini terjadi disebut *kecepatan lepas* v_ℓ. Jelas bahwa $K(v_\ell) = \frac{1}{2} mv_\ell^2 = |U(r_{bumi})|$, sehingga

$$\frac{1}{2} mv_\ell^2 = \frac{GM_B m}{r_b} \quad \text{atau} \quad v_\ell = \sqrt{\frac{2\ GM_B}{r_b}}$$

Tampak bahwa v_ℓ tidak bergantung pada massa benda. Benda berat atau ringan perlu kecepatan awal yang sama untuk lepas dari bumi. Akan tetapi energi yang diperlukan jelas akan berbeda.

4.9 GERAK LURUS DI BAWAH PENGARUH GAYA SENTRAL

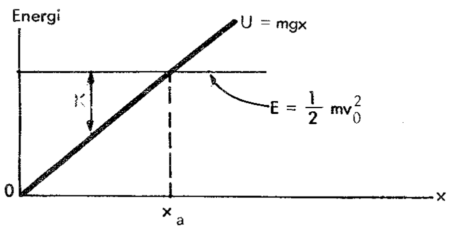
Seringkali kita ingin mengetahui gerak suatu benda di bawah pengaruh gaya medan, yaitu suatu gaya yang bergantung pada posisi secara kontinu. Untuk gaya sentral dimana arah gaya adalah menuju suatu pusat, dan besar gaya hanya bergantung pada jarak saja dan tidak bergantung pada arah vektor posisi, kita dapat mempergunakan hukum kekekalan energi mekanik total. Hal ini oleh karena gaya sentral selalu bersifat konservatif.



GB. 4-27 (A) GAYA PEGAS DAN ENERGI POTENSIALNYA. (B) GAYA KONSTAN (MEDAN GRAVITASI DEKAT PERMUKAAN BUMI) DAN ENERGI POTENSIAL NYA

Seperti telah dibahas di depan jika kita mengetahui bagaimana energi potensial benda berubah dengan jarak, kita dapat mempergunakan hukum kekekalan energi mekanik total untuk menganalisa gerak benda di bawah pengaruh gaya medan ini.
Untuk mempermudah pembahasan, kita hanya akan meninjau *gerak* lurus di bawah pengaruh gaya medan sentral. Gaya pegas, gaya gravitasi dekat permukaan bumi, dan gaya gravitasi jauh dari muka bumi adalah beberapa contoh gaya medan sentral. Bentuk gaya dan energi potensial dilukiskan pada Gb. 4-27.

Misalkan kita ingin menganalisa gerak benda dekat permukaan bumi dengan mempergunakan grafik $U(x)$. Pada $x = 0$ kita ambil $U = 0$, sehingga $U(x)$ dapat dilukiskan seperti pada Gb. 4-28. Kemudian misalkan sebuah benda bermassa m dilempar dari tanah ($x=0$) dengan kecepatan v_0, maka energi kinetik benda pada waktu dilempar adalah $K_0 = \frac{1}{2}\ m\ v_0^2$. Energi potensial benda pada waktu dilempar ($x=0$) adalah $U_0(x=0) = 0$, sehingga energi mekanik benda $E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}\ m\ v_0^2$. Karena gaya



GB. 4-28 ANALISA GERAK DENGAN KURVA ENERGI POTENSIAL UNTUK GERAK DEKAT MUKA BUMI

gravitasi adalah gaya konservatif, maka energi total dari benda akan tetap sama dengan $\frac{1}{2} mv_0^2$. Fungsi $E = \frac{1}{2} mv_0^2$ = tetap ini dilukiskan pada Gb. 4-28 sebagai garis lurus sejajar sumbu x. Tampak bahwa posisi benda tidak mungkin lebih besar dari x_a, sebab hal ini berarti energi kinetik benda harus negatif. Nilai terbesar dari posisi benda, yaitu $x = x_a$ dapat dihitung dari

$$U(x_a) = E = \tfrac{1}{2} mv_0^2 \qquad \text{atau} \qquad mgx_a = \tfrac{1}{2} mv_0^2$$

sehingga $x_a = \dfrac{v_0^2}{2g}$

Persamaan gerak benda dapat ditentukan sebagai berikut. Pada posisi sebarang x

$$\tfrac{1}{2} m v^2 + U(x) = E = \text{tetap} \tag{4-41}$$

Pada $x = 0$ $E = \frac{1}{2} mv_0^2 + mg(0) = \frac{1}{2} mv_0^2$, sehingga pada setiap posisi $E = \frac{1}{2} mv_0^2$.
Dari persamaan (4-41), diperoleh

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}$$

atau

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}} = dt \tag{4-42}$$

Jika persamaan (4-42) diintegrasikan, kita peroleh

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}} = \int_{t_0}^{t} dt \tag{4-43}$$

Untuk gerak dekat permukaan bumi
$U(x) = mgx$, sehingga dari persamaan (4-43), dan untuk $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, kita peroleh

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2\,gx}} = \int_0^t dt = t \tag{4-44}$$

Integral

$\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2\,gx}}$ mempunyai bentuk umum

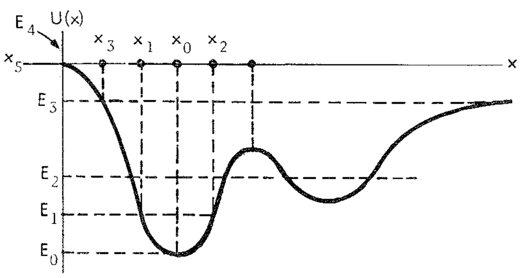
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{b}\int_0^x (a + bx)^{\frac{1}{2}}\, d(a + bx)$$

$$= \frac{2}{b}(a + bx)^{\frac{1}{2}}\Big/_0^x = \frac{2}{b}(a + bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{b}(a)^{\frac{1}{2}}$$

dengan $a = v_0^2$ dan $b = -2g$.
Jadi persamaan (4-40) memberikan

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad ,$$

yang tidak lain adalah gerak jatuh bebas.
Persoalan yang sederhana jika diselesaikan dengan hukum II Newton dan kinematika, menjadi sangat sulit jika diselesaikan dengan cara ini.
Akan tetapi persoalan yang umum seringkali sangat sulit, bahkan tak dapat dipecahkan dengan integrasi langsung hukum II Newton. Dengan mempergunakan kurva U(x) kita juga dapat memperoleh gambaran kuantitatif terhadap kecepatan sebagai fungsi posisi langsung dari persamaan (4-42) tidak peduli bagaimana sulitnya bentuk fungsi U(x).
Sebagai suatu contoh, perhatikan fungsi energi potensial yang dilukiskan pada Gb. 4-10. Fungsi energi potensial U(x) dapat menggambarkan energi potensial dari sebuah kereta luncur (Inggris: *roller coaster*), yaitu sebuah kereta dengan rel yang naik turun dengan bentuk lengkungan rel seperti U(x). Akan tetapi energi potensial di atas dapat juga melukiskan energi potensial elektron di dalam kristal.
Karena kita harus mempunyai energi mekanik total $E \geqslant U(x)$, agar energi kinetik tidak negatif, maka harga energi mekanik total yang paling rendah haruslah sama dengan E_0. Dalam keadaan ini energi kinetik benda haruslah sama dengan nol, dan partikel berada dalam keadaan berhenti pada x_0. Pada harga energi yang lebih tinggi sedikit, yaitu E_1, partikel dapat bergerak antara x_1 dan x_2. Ketika bergerak dari x_0 kecepatan partikel berkurang waktu mendekati x_1 atau x_2. Pada x_1 atau x_2 partikel berhenti, dan berbalik arah. Gerak antara x_1 dan x_2 dapat dibayangkan sebagai gerak dari sebuah benda yang dilepaskan pada x_1 dan dibiarkan meluncur karena pengaruh gaya gravitasi. Benda akan meluncur pada permukaan U(x) dan bergerak bolak-balik antara x_1 dan x_2 di sekitar x_0. Titik x_1 dan x_2 disebut *titik balik.*
Pada harga energi total E_2 ada empat buah titik balik, dan partikel dapat berosilasi atau bergerak bolak-balik dalam salah satu dari lembah potensial pada Gb. 4-29. Pada energi total E_3 hanya ada satu titik



GB. 4.29. KURVA ENERGI POTENSIAL

balik yaitu pada x_3. Jika misalnya mula-mula partikel berada pada $x = \infty$ dan bergerak ke arah x negatif karena pengaruh gaya medan, maka partikel akan berhenti di x_3, kemudian ditolak kembali dan bergerak ke arah x positif; kecepatannya bertambah besar jika U(x) berkurang, dan menjadi pelan pada waktu U bertambah besar. Pada energi E_4 tidak ada titik balik, dan partikel akan bergerak dalam satu arah saja.
Pada titik dimana U(x) mempunyai harga minimum, maka $F = -\frac{dU}{dx}$ sama dengan nol. Sebuah partikel yang berhenti pada posisi ini akan tetap berhenti. Jika partikel didorong sedikit agar tergeser dx, maka akan terjadi gaya $dF = \frac{dF}{dx}\,dx = -\frac{d^2U}{dx^2}\,dx$.

Jika U(x) pada tempat tersebut adalah minimum, maka $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, sehingga gaya dF selalu mempunyai arah berlawanan dengan perubahan posisi. Akibatnya partikel akan dikembalikan pada keadaan semula. Kesetimbangan seperti ini disebut kesetimbangan *stabil* atau *tunak*

Pada titik dimana U(x) mempunyai harga maksimum, gaya pada titik ini juga sama dengan nol, karena di sini $F = -\frac{dU}{dx} = 0$. Akan tetapi karena pada suatu maksimum $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$, maka jika partikel didorong sedikit akan terjadi perubahan gaya $dF = -\frac{d^2U}{dx^2}dx$ yang mempunyai harga positif. Akibatnya benda akan bergerak lebih cepat. Kesetimbangan seperti ini disebut, kesetimbangan *tak stabil* atau kesetimbangan *labil*.

Pada interval dimana U(x) adalah konstan, seperti pada x_5, $F = - dU/dx = 0$, dan juga $d^2U/dx^2 = 0$. Dalam interval ini benda berada dalam *keadaan setimbang netral*, karena jika didorong sedikit benda tetap berada dalam keadaan setimbang.

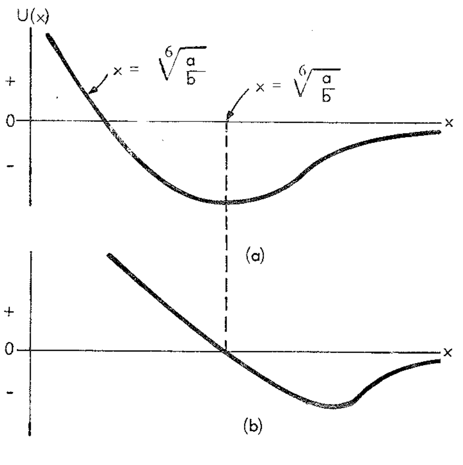
Contoh 4-11

Fungsi energi potensial gaya antara dua atom dalam molekul diatomik (bermolekul dua) dapat dinyatakan sebagai

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

dengan a dan b adalah tetapan positif, dan x adalah jarak antara atom-atom,

(a) Pada harga x yang mana U(x) sama dengan nol, dan pada posisi mana U(x) mempunyai harga minimum?



GB. 4-30 (A) KURVA ENERGI POTENSIAL
(B) GAYA ANTARA DUA ATAOM DALAM MOLEKUL DIATOMIK SEBAGAI FUNGSI JARAK ANTARA DUA ATOM

Harga x dimana U(x) sama dengan nol diperoleh dari

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0$$

Jadi pada $x^6 = \frac{a}{b}$, atau $x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$

U(x) juga sama dengan nol untuk $x \to \infty$. Sedang minimum dari U(x) dapat diperoleh dari

$$\frac{dU}{dx} = \frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0,$$

jadi pada $x = \sqrt{\frac{2a}{b}}$.

(b) Tentukan gaya antara dua atom dalam molekul ini.

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$$

Gaya sebagai fungsi x dilukiskan pada Gb. 4-27 (b). Jika gaya mempunyai harga positif $\left(\text{dari } x = 0 \text{ sampai } x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right)$ kedua atom saling menolak. Jika gaya negatif, maka kedua atom saling menarik. Pada $x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ gaya sama dengan nol, ini adalah titik setimbang, yaitu titik setimbang stabil.

(c) Jika salah satu atom dianggap diam, bagaimanakah gerak atom yang lain?

Atom yang lain akan berosilasi sekitar titik setimbang $x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$

(d) Energi yang diperlukan untuk memecah molekul menjadi dua atom terpisah disebut energi disosiasi. Berapakah energi disosiasi dari molekul ini?

Jika salah satu atom memiliki energi kinetik cukup besar untuk melewati bukit potensial, atom ini tidak lagi terikat pada atom yang lain. Jadi energi disosiasi D adalah sama dengan perubahan energi potensial dari harga minimum pada $x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ ke harga energi potensial di titik $x = \sim$. Ini tidak lain adalah

$$U(x = \sim) - U\left(x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right) = \frac{b^2}{4a}$$

Jika energi kinetik pada titik setimbang adalah sama atau lebih besar dari harga ini, maka molekul akan terpecah.

4.10 KEKEKALAN ENERGI

Gaya gravitasi dan gaya pegas bersifat konservatif, artinya kerja yang dilakukan melawan gaya ini memindahkan energi dari pelaku gaya menjadi energi simpanan, yaitu energi potensial. Jika benda bergerak melawan gaya ini, maka energi kinetiknya akan diubah menjadi energi potensial. Ini adalah suatu energi simpanan yang seluruhnya dapat diubah menjadi energi kinetik kembali. Jadi kerja melawan gaya ini tidaklah membuang energi.

Ciri khas dari gaya konservatif seperti ini adalah bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya ini dalam geraknya pada suatu lintasan tertutup adalah sama dengan nol. Jadi jika sebuah benda bergerak dari suatu titik, bergerak sepanjang suatu lintasan tertutup di bawah pengaruh gaya ini, dan sampai ke titik awal tadi, maka energi yang ditransfer kepada benda sama dengan nol. Secara matematik ini dinyatakan oleh integral

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Sekarang bagaimana halnya jika gaya-gaya yang bekerja pada benda ada yang bersifat konservatif dan ada yang tidak. Kerja oleh gaya konservatif menjadi tambahan atau pengurangan energi potensial benda.
Jumlah energi potensial benda dengan energi kinetiknya disebut *energi mekanik total*. Energi mekanik total ini bersifat kekal, jika semua gaya-gaya yang bekerja pada benda bersifat konservatif. Ini berarti

jika di titik A benda mempunyai energi mekanik total E_A, dan di B mempunyai energi mekanik total E_B, jika semua gaya bersifat konservatif maka $E_A = E_B$. Selanjutnya ini berarti
$\Delta E = \Delta$(Energi kinetik + Energi potensial) = 0.
Jadi Δ(Energi kinetik) = $-\Delta$(Energi potensial)
Pertambahan energi kinetik sama dengan pengurangan energi potensial.

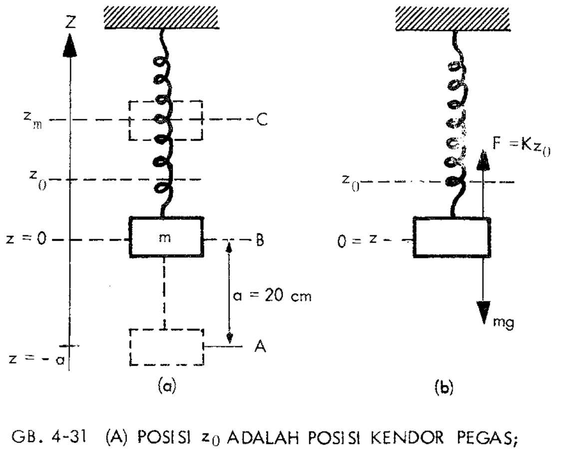
Apa yang terjadi jika di antara gaya-gaya yang bekerja pada benda ada yang bersifat tak konservatif? Dalam hal ini *energi mekanik* benda, yaitu jumlah energi kinetik dan energi potensial benda, tidaklah kekal, akan tetapi *energi total* benda tetap kekal. Energi mekanik di B haruslah sama dengan energi mekanik di A ditambah dengan energi yang diterima benda berhubung adanya kerja positif pada benda, atau dikurangi dengan energi yang ditransfer keluar oleh kerja negatif pada benda oleh gaya tak konservatif.
Dengan kata lain $E_B = E_A + W$, atau

$$W = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

dengan E_A adalah energi mekanik total benda di A, E_B energi mekanik total di B, dan W kerja oleh gaya tak konservatif dalam perjalanan antara A dan B. Hubungan ini disebut *teorema kerja-energi*.
Sekarang marilah kita bahas beberapa contoh pemakaian.

Contoh 4-12

Sebuah benda bermassa 1 kg digantung pada sebuah pegas.
Pegas ditarik sejauh 20 cm dari posisi setimbang; kemudian dilepaskan.
Jika konstanta pegas adalah 1 N/cm, tentukan
(a) kecepatan benda waktu mencapai titik setimbang
(b) tinggi maksimum yang dicapai oleh benda.
Gesekan udara diabaikan, dan $g = 10$ m/det^2.
Untuk membahas persoalan ini perhatikan Gb. 4-31.



GB. 4-31 (A) POSISI z_0 ADALAH POSISI KENDOR PEGAS; PEGAS DITARIK SEJAUH a, KEMUDIAN DILEPASKAN. z = 0 ADALAH POSISI SETIMBANG
(B) DALAM KEADAAN SETIMBANG $Kz_0 = mg$

Gaya-gaya yang bekerja pada benda hanyalah gaya pegas dan gaya berat, dan keduanya bersifat konservatif. Jelas bahwa energi mekanik total haruslah kekal.
Di A benda dalam keadaan berhenti. Jadi
E_A = energi potensial gravitasi di A + energi potensial pegas di A

$$= mg\,(-a) + \tfrac{1}{2}\,k(a + z_0)^2$$

Jarak z_0 dapat kita tentukan dari kenyataan bahwa pada keadaan setimbang gaya pegas = gaya berat, atau $kz_0 = mg$, sehingga

$$z_0 = \frac{mg}{k} = \frac{(1\text{ kg}) \times (10\text{ m/det}^2)}{1\text{ N}/(10^{-2}\text{ m})} = 10^{-1}\text{ m} = 10\text{ cm}.$$

Dengan a = 20 cm kita peroleh

$E_A = -(1 \text{ kg}) \times (10 \text{ m/det}^2)(0,2 \text{ m}) + \frac{1}{2} \times 10^2 (\text{N/m})(0,1 + 0,2)^2 \text{ m}^2$

$= -2 \text{ joule} + 4,5 \text{ joule} = 2,5 \text{ joule}$

Di B benda mencapai titik setimbang statik, dan energi potensial gravitasi sama dengan nol karena titik ini kita ambil sebagai titik asal $z = 0$. Energi mekanik total di B

E_B = Energi kinetik di B + energi potensial pegas di B

$= \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k z_0^2 = \frac{1}{2}(1 \text{ kg})(v_B^2) + \frac{1}{2}(10^2 \text{ N/m})(0,1 \text{ m})^2$

$= (0,5 \, v_B^2 + 0,5)$ joule

Karena energi mekanik total kekal, maka $E_B = E_A$, sehingga

$(0,5 \, v_B^2 + 0,5) = 2,5$

$v_B^2 = 4$ atau $v_B = 2$ m/det.

Di titik C benda mencapai posisi tertinggi, sehingga kecepatan sama dengan nol.
Maka energi mekanik total di C
E_C = energi potensial gravitasi di C + energi potensial pegas di C.

$= mg \, z_m + \frac{1}{2} k(z_m - z_0)^2$

$= (1 \text{ kg})(10 \text{ m/det}^2) \, z_m + \frac{1}{2} \times (10^2 \text{ N/m})(z_m - 0,1)^2$

$= 10 \, z_m + 50(z_m - 0,1)^2$ joule

Karena energi mekanik total kekal maka $E_C = E_A$, sehingga

$10 \, z_m + 50(z_m - 0,1)^2 = 2,5$ joule

$10 \, z_m + 50(z_m - 0,2 \, z_m + 0,01) = 2,5$

$10 \, z_m + 50 \, z_m^2 - 10 \, z_m + 0,5 = 2,5$

$10 \, z_m^2 = 2,0$

$z_m = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}.$

Ini berarti bahwa benda bergerak harmonik sekitar titik $z = 0$, dan bukan terhadap titik $z = z_0 = 10$ cm, yaitu posisi kendor pegas.

Contoh 4-13
Sebuah balok bermassa 5 kg diluncurkan ke atas bidang miring dengan kecepatan 5m/det². Sudut bidang miring adalah 30°. Didapatkan bahwa balok meluncur sejauh 2 m, berhenti, dan meluncur kembali ke dasar bidang miring. Hitung gaya gesekan f yang bekerja pada balok dan tentukan kecepatan v dari balok pada waktu sampai di dasar bidang miring.
Pada gerak ke atas, energi mekanik total pada awal gerak adalah

$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 25 \text{ joule} = 62,5 \text{ joule}.$

Energi mekanik total pada akhir gerak ke atas, yaitu pada waktu balok berhenti meluncur adalah

$K = mgh = mg\ L \sin 30^{\circ} = 5 \times 10 \times 2 \times 0,5 = 50$ joule.

Energi yang hilang adalah $E = (62,5 - 50)$ joule $= 12,5$ joule. Energi terbuang karena kerja oleh gaya gesekan adalah

$W_f = - f\ L = -f \times 2$ joule.

Jadi

$W_f = -2f = -12,5$ joule, atau $f = 6,25$ newton, dengan arah berlawanan arah gerak benda. Kecepatan balok waktu sampai di dasar bidang miring dapat dihitung sebagai berikut. Pada gerak ke bawah energi pada awal gerak adalah

$E_0 = mgh = mg\ L \sin 30^{\circ} = 62,5$ joule

Energi terbesar $W_f = -fL$ akan hilang lagi sebagai kalor. Sedang

$W_f = -fL = -6,25$ Nt $\times$ 2 m $= -12,5$ joule.

Pada akhir gerak energi mekanik benda menjadi

$E = E_0 + W_f = 62,5 - 12,5 = 50$ joule.

Energi ini adalah energi kinetik, sebab energi potensial pada dasar bidang miring adalah sama dengan nol. Jadi

$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times v^2 = 50$ joule

atau

$v^2 = 20$ atau $v = 4,4$ m/det^2.

Kekekalan energi umum

Sudah kita ketahui bahwa jika ada gaya-gaya tak konservatif yang bekerja pada benda, maka teorema kerja-energi dapat ditulis sebagai

$W_{\text{tak konservatif}} = \Delta K + \Delta U.$

Di sini kerja oleh gaya-gaya konservatif timbul sebagai perubahan energi potensial. Pada kenyataannya ada beberapa macam gaya konservatif yang ada dalam alam, seperti gaya pegas, gaya gravitasi, gaya coulomb, dan nuklir. Jadi persamaan di atas seharusnya ditulis sebagai

$W_{\text{tak konservatif}} = \Delta K + \Sigma \Delta U$

Di dalam Fisika juga banyak dikenal gaya-gaya tak konservatif. Telah kita ketahui bahwa jika gaya gesekan adalah *satu-satunya* gaya tak konservatif yang bekerja pada benda, maka $W_{\text{tak konservatif}}$ $= W_f = - Q$, dimana Q adalah kalor yang *diperoleh* benda, sehingga teorema kerja energi dapat ditulis sebagai

$0 = \Delta K + \Sigma \Delta U + Q$

Pada umumnya, jika ada gaya-gaya tak konservatif *lain* di samping gaya gesekan, dan W' menyatakan kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya ini, teorema kerja-energi dapat ditulis sebagai

$W' = \Delta K + \Sigma \Delta U + Q.$

W' akan memberikan bentuk energi baru, dan akan menjadi tambahan energi benda. Akibatnya bentuk yang paling umum dari kekekalan energi adalah

$\Delta K + \Sigma \Delta U + Q +$ (perubahan energi dalam bentuk lain) = 0.

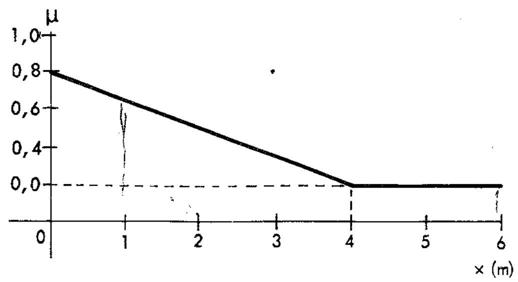
Dengan kata lain, energi total, yaitu *jumlah* dari kinetik, energi-energi potensial, energi kalor dan energi-energi dalam bentuk lain dari sebuah benda adalah tidak berubah. *Energi dapat diubah dari satu bentuk ke bentuk lain, akan tetapi tidak dapat dibentuk dari nol, atau dimusnahkan. Energi total adalah tetap.*
Pernyataan ini adalah kesimpulan umum dari pengalaman sehari-hari, akan tetapi sampai sekarang belum pernah dilanggar.
Seringkali dalam sejarah Fisika prinsip ini kelihatan gagal. Akan tetapi kegagalan semua ini menstimulir orang untuk mencari sebab-sebabnya. Sarjana-sarjana eksperimental mencari gejala-gejala di samping gejala yang timbul bersama gaya-gaya interaksi antara dua benda. Gejala-gejala semacam itu selalu dapat diketemukan. Dengan kerja melawan gesekan timbul kalor; dalam interaksi-interaksi yang lain energi dalam bentuk bunyi, cahaya, listrik mungkin ditimbulkan. Jadi pengertian energi telah dibuat umum dengan memasukkan gejala-gejala lain di samping energi kinetik dan energi potensial. Ini menghubungkan mekanika dengan semua cabang Fisika. Pengertian energi sekarang telah menyelinap ke dalam seluruh ilmu pengetahuan alam, dan telah menjadi salah satu dari pengertian-pengertian pemersatu dalam Fisika.
Meskipun kekekalan dari jumlah energi kinetik dan energi potensial seringkali bermanfaat, kita telah mengetahui bahwa ini adalah hal khusus dari hukum kekekalan energi yang umum. Energi kinetik ditambah dengan energi potensial adalah kekal jika pada benda hanya bekerja gaya-gaya konservatif. Energi total *selalu* kekal.

Soal latihan

1 Sebuah benda bergerak lurus di atas lantai horizontal ditarik dengan tali. Massa benda adalah 5 kg, sedang koefisien gesekan lantai adalah 0,6. Akibat gaya-gaya yang bekerja, benda bergerak dengan percepatan 2 m/det^2. Andaikan percepatan gravitasi adalah 10 m/det^2.
(a) Berapa besar energi yang diberikan oleh orang yang menarik tali; agar benda bergerak sejauh 2 m?
(b) Berapa besar energi yang hilang karena gesekan. Kemana energi ini hilang?

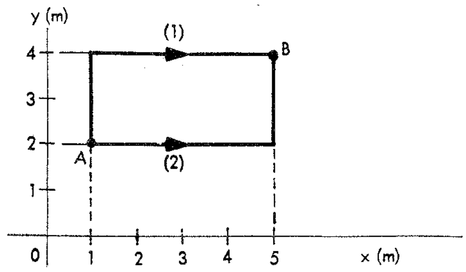
2 Bila diketahui gaya yang bekerja pada sebuah benda diberikan oleh vektor $\bar{F} = \hat{i}\ 10 + \hat{j}\ 20$ N, dan pergeseran yang dihasilkan adalah $\Delta\bar{r} = 0{,}5\ \hat{i} - \hat{j}\ 2$ m.
Berapa energi yang diterima benda setelah mengalami pergeseran di atas?

3 Sebuah benda bergerak lurus di atas lantai datar (horizontal). Gaya gesekan adalah satu-satunya gaya yang bekerja dalam arah gerak.



Koefisien gesekan berubah dengan posisi x seperti pada gambar.
Bila massa benda adalah 2 kg, dan percepatan gravitasi 10 m/s, tentukan energi yang hilang karena gesekan waktu benda bergerak dari x = 1 m sampai x = 6 m.

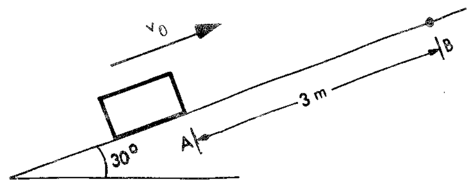
4



Suatu gaya medan mempunyai bentuk $\bar{F} = \hat{i}10x^2$ bekerja pada benda.
Di bawah pengaruh gaya ini benda bergerak dari A ke B.
(a) Hitung energi yang diperoleh benda bila diambil jalan (1).
(b) Hitung energi yang diperoleh benda bila diambil jalan (2).
(c) Hitung energi yang diperoleh benda bila bergerak dari A melalui jalan (2), sampai B, melalui jalan (1), dan kembali di A lagi.

5 Sebuah mobil bergerak dengan laju tetap 50 km/jam. Bila pada laju ini daya yang dihasilkan mobil adalah 80 hp, hitunglah
(a) Gaya tarik mesin mobil.
(b) Berapa energi hilang karena gesekan dalam waktu 1 jam?

6



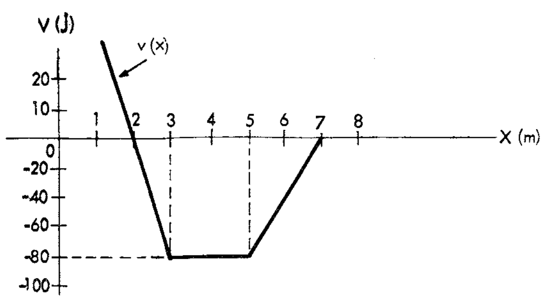
Sebuah benda dilemparkan ke atas sepanjang bidang miring.
Laju di A adalah 10 cm/det, waktu sampai di B laju tinggal 5 cm/det.
Bila massa benda 2 kg, dan percepatan gravitasi 10 m/s^2, hitung

(a) Kerja yang dilakukan pada benda dari A ke B.
(b) Kerja dilakukan oleh medan gravitasi.
(c) Koefisien gesekan lantai.

7 Untuk menarik sebuah pegas sejauh 10 cm diperlukan gaya 10 N. Bila panjang pegas adalah 40 cm, dan pegas ditekan dan ditahan agar panjang menjadi 35 cm. Tentukan
(a) Tetapan pegas.
(b) Energi tersimpan dalam pegas yang ditekan.
(c) Bila energi listrik berharga Rp. 200/kwh, dan andaikan harga energi pegas sama dengan energi listrik, berapakah harga energi pegas di atas?

8 Sebuah peluru meriam bermassa 10 kg ingin ditembakkan keluar bumi. Bila massa bumi adalah M, jejari bumi 6000 km, dan tetapan gravitasi G, hitunglah
(a) Laju awal minimum yang harus diberikan kepada peluru.
(b) Berapa energi diperlukan untuk melemparkan peluru tersebut.
(c) Tentukan laju awal yang diperlukan untuk menembakkan roket bermassa 10^4 kg, dan berapa pula energi yang diperlukan untuk ini?

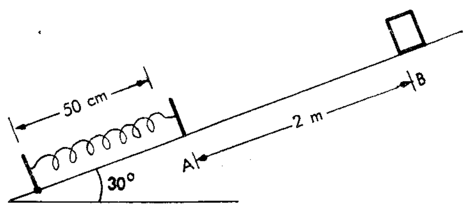
9 Sebuah partikel masuk ke dalam mengaruh suatu medan potensial. Bentuk medan potensial adalah seperti pada gambar.



(a) Bila benda mempunyai energi total + 20 J, hitung laju waktu berada pada posisi x = 6 m.
Hitung pula jarak terdekat dari 0 yang dapat dicapai benda.
(b) Bila energi total adalah -40 J, tentukan batas-batas gerak benda.

Hitung pula laju waktu berada pada posisi x = 4 m dari 0.

10



Sebuah benda mula-mula diam di B.
Benda dilepaskan dan bergerak sepanjang lantai miring yang mempunyai koefisien gesekan 0,5.
Percepatan gravitasi adalah 10 m/s^2.

(a) Hitung energi awal benda.
(b) Hitung laju waktu benda sampai di A.
(c) Hitung berapa panjang pegas waktu benda pegas menahan benda hingga berhenti.